

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

**Terim:** Bir bilim dalı içerisinde konuşma dilinden farklı anlamı olan sözcüklerden her birine o bilim dalının bir terimi denir.

Örneğin açığı bir geometri terimi, toplama bir matematik terimi ve kütle bir fizik terimidir.

Bir terimin anlamını belirlemeye terimi tanımlamak denir.

Örneğin "Üç kenarının uzunluğu eşit üçgene eşkenar üçgen denir" ifadesi bir tanımdır.

Bir terimi tanımlamak için o bilim dalı içerisinde daha önce tanımlanmış terim ve kavramlardan yararlanır. Bazı terimlerin tanımı yoktur. Örneğin nokta, doğru, küme gibi terimler tanımsızdır ; bu gibi terimler sezgisel alınır.

Mantık akıl yürütme yöntemlerini inceleyen bilim dalıdır.

Mantiğa matematiksel yapıyı kazandıran George Boole 1848 yılında "Mantiğin Matematik Analizi" adlı bir çalışmayı yayınlamıştır. İki değerli Aristoteles mantığını matematiksel temellere oturtan simgesel mantığı yaratmıştı. (Boole mantığı, Boole cebiri, matematiksel mantık, simgesel mantık )

**Önerme:** Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm içeren ifadelere önerme denir.

#### Örnek...1 :

Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadıklarını belirtiniz.

- Alfabemizde 50 harf vardır
- Bir gün 18 saattir
- Bir üçgenin iç açıları toplamı  $180^\circ$ dir
- Ders çalışalım
- Ali çalışkan bir çocuktur.

Önermeler p,q,r,s gibi harflerle belirtilirler.

p: " Bir yıl 265 gün 6 saattir."  
r : "2 sayısı irrasyonel bir sayıdır."

**Doğruluk Değeri :** Bir önermenin doğru ya da yanlış oluşuna , o önermenin doğruluk değeri denir .

Herhangi bir öneme için yanlış veya doğru olmak üzere iki durum söz konusudur.

Uluslar arası birliğin sağlanması açısından doğru yerine 1 simgesi yanlış yerine 0 simgesi kullanılır.

Buradaki 1 ve 0 simgelerinin sayısal bir değeri yoktur.

#### Örnek...2 :

Herhangi bir P önermesinin doğruluk değerini tablo ile gösteriniz.

P önermesinin doğruluk değeri 1 ve 0 olabileceğinden tablo ile gösterirsek (özetlersek)

P
0
1

#### Örnek...3 :

Herhangi p ve q önermelerinin doğruluk değerini tablo ile gösteriniz .

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

#### Örnek...4 :

Herhangi üç p,q ve r önermelerinin doğruluk değerini tablo ile gösteriniz .

**Denk Önermeler:** Doğruluk değeri aynı olan önermelere denk önerme denir . Eğer p ve q gibi iki önerme birbirine denk ise bunu  $p \equiv q$  biçiminde belirtiriz.

#### Örnek...5 :

- p : "Van Türkiye'nin başkentidir."  
q : " İstanbul 'un plaka numarası 34' tür ."  
r : "Zonguldak Karadeniz Bölgesindedir."  
t : "Almanya Avrupa kıtasındadır."  
s: "3>7"  
v : "5 asal bir sayı değildir."  
önermelerinden denk olanları belirtiniz

**Bir Önermenin Olumsuzu/Değili :** Bir önermenin hükmünün olumsuzu alınarak yapılan yeni önermeye , o önermenin olumsuzu denir .

Bir p önermesinin olumsuzu p' (veya  $\sim p$ ) ile gösterilir.

Verilen bir önermenin olumsuzunu bulmak için önermenin sonuna değil sözcüğü getiririz.

#### Örnek...6 :

- p : "2 asal bir sayıdır."  
q : " 2=3"  
r : " Kar beyazdır."  
s: "Antalya Akdeniz bölgesindedir."  
önermelerinin olumsuzunu (değilllerini) yazınız

#### Örnek...7 :

Tabloyu doldurunuz

P	P'

Uyarı

$(=)'$  =  $\neq$  ,  $(<)'$  =  $\geq$  ,  $(>)'$  =  $\leq$

**Bileşik Önerme :** İki ya da daha fazla önermenin "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" bağlaçları ile birleşmesiyle elde edilen yeni önermelere bileşik önerme denir.

Bağlaç Adı	Bağlacı Temsil Eden Sembol
veya	$\vee$
ve	$\wedge$
ya da	$\veebar$
ise	$\Rightarrow$
ancak ve ancak (gerek ve yeter şart)	$\Leftrightarrow$

- p: "Ali siyah saçlıdır."  
r: "3+4=7" önermeleri için bağlaçları kullanarak bileşik önermeler yapınız.

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

1. “Veya” Bağlacı : p ile q önermelerinden en az biri doğru ise “veya” bağlacı ile kurulan “p veya q” bileşik önermesi doğru, p ile q nun her ikisi de yanlış ise “p veya q” bileşik önermesi yanlıştır.

p veya q bileşik önermesi genellikle  $p \vee q$  ile belirtilir.

Tanıma göre  $p \vee q$  nun tablosu :

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

biçimindedir.

#### Örnek...8 :

p: “ $3 < 7$ ”

q: “10 asal bir sayıdır.”

r: “ $2=3$ ”

s: “üzüm bir meyvedir” .önermeleri için veya ile bileşik önermeler yapınız.

Bu bileşik önermelerin doğruluk değerini bulunuz.

2. “Ve” Bağlacı : p ile q önermelerinin her ikisi de doğru ise ‘ve’ bağlacı ile kurulan “p ve q” bileşik önermesi doğru, p ile q nun en az biri yanlış ise “p ve q” bileşik önermesi yanlıştır.

p ve q bileşik önermesi genellikle  $p \wedge q$  ile belirtilir.

Tanıma göre  $p \wedge q$  nun tablosu:

p	q	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

biçimindedir

#### Örnek...9 :

p: “ $3 > 7$ ”

q: “5 tek bir sayıdır.”

r: “ $2 \leq 3$ ”

s: “Salı gününden sonra Pazar günü gelir.” önermeleri için “ve” ile bileşik önermeler yapınız.

Bu bileşik önermelerin doğruluk değerini bulunuz.

#### $\vee$ ve $\wedge$ işleminin özellikleri

p,q ve r birer önerme olsun

1. Tek kuvvet özelliği : p önermesi için  $p \vee p \equiv p$  ve  $p \wedge p \equiv p$

2. Değişme özelliği :  $p \vee q \equiv q \vee p$  ve  $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. Birleşme özelliği :

$p \vee (q \wedge r) \equiv (q \vee p) \vee r$  ve

$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \wedge p) \wedge r$

4. Dağılım özelliği :

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  ,

$(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$  ve

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  ,

$(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$

5. De Morgan Kuralları:  $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$   
ve  $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

#### Örnek...10 :

De Morgan kurallarının varlığını doğruluk tabloları yardımıyla gösterelim.

p	q	p'	q'	p ∧ q	(p ∧ q)'	p' ∨ q'

p	q	p'	q'	p ∨ q	(p ∨ q)'	p' ∧ q'

#### Örnek...11 :

$p \equiv 0$  ,  $q \equiv 1$  ,  $r' \equiv 1$  ise  $[p' \wedge r] \vee (p' \vee q)'$  önermesinin en sade hali nedir?

#### Örnek...12 :

$p \vee q \equiv 0$  ,  $p' \wedge r \equiv 1$  veriliyor hangileri doğru olabilir?  
i) p ii)  $p \wedge r$  iii)  $q' \vee r'$

Önermeler cebri : Bir denklik doğruluk tablosu yapılmadan bağlaçların özellikleri kullanılarak ta gösterilebilir. Bu işlemlerin tümüne önermeler cebri denir

#### Örnek...13 :

Doğruluk tablosu yapmadan aşağıdaki önermelerin doğrulayınız.

1.  $p \vee [p' \wedge (q \vee p)] \equiv p \vee q$

2.  $[p \vee (q' \wedge p')] \wedge (p \vee q) \equiv p$

#### Örnek...14 :

$\{(p \vee q) \wedge (p \vee q')\} \vee p'$  önermesinin en sade hali nedir?

#### Örnek...15 :

$\{(p \wedge q) \vee (p' \wedge q)\} \vee q$  önermesinin en sade hali nedir?

Kümelerle yapılan işlemler ve sembolik mantıkta kullanılan sembol, gösterim ve bunlarla ifade edilen işlemler arasında aşağıdakine benzer ilişkilendirmeler yapılabilir.

Sembolik mantık	0	1	∨	∧	'	≡
Kümeler	∅	E	∪	∩	'	=

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

#### Örnek...16 :

Mantık işlemlerine karşılık gelen küme ilişkilendirmelerini yazınız

Sembolik mantık	Kümeler
$p \vee q \equiv 1$	$A \cup A' = E$
$p \wedge p' \equiv 0$	
$p \wedge (q \vee r) \equiv$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$	

#### Örnek...17 :

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere,  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  eşitliğini sembolik mantık kurallarından yararlanarak gösteriniz

3. "ya da" Bağlacı : p ile q önermeleri denk önermelerken 'ya da' bağlacı ile kurulan "p ya da q" bileşik önermesi yanlış, aksi takdirde "p ya da q" bileşik önermesi doğrudur.

p ve q bileşik önermesi genellikle  $p \vee q$  ile belirtilir.

Tanıma göre  $p \vee q$  nun tablosu :

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

biçimindedir.

1)  $(1 \vee 0) \wedge 1 \equiv ?$

2)  $(0 \vee 0) \vee 1 \equiv ?$

3)  $(p \vee p') \wedge (q \vee q) \equiv ?$

#### Örnek...18 :

$p \equiv 1, q \equiv 0$  olduğuna göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

I.  $(p \vee q) \wedge r \equiv$

II.  $((p \vee q)') \vee q' \wedge r \equiv$

III.  $[(p \vee r') \wedge (r' \wedge q)] \wedge q' \equiv$

IV.  $(p \vee r) \wedge [(q \wedge r') \vee (r \vee q')]$

#### Örnek...19 :

$(0 \wedge 1)' \wedge p \equiv 0$  ve  $q \vee [(0 \vee 0') \wedge (1 \wedge 0)] \equiv 0$  ise p ve q önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

**4. İse bağlacı :** p doğru bir önerme q yanlış bir önerme iken ise bağlacı ile yapılan "p ise q" bileşik önermesi yanlış diğer durumlarda doğrudur.

"p ise q" önermesi genellikle  $p \Rightarrow q$  ile belirtilir.

Tanıma göre p ise q bileşik önermesinin tablosu

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

**Koşullu öneme :** "ise" bağlacı ile oluşturulan  $p \Rightarrow q$  bileşik önermesine koşullu önerme denir.

$p \Rightarrow q$  önermesinde p ye hipotez (varsayım), q ya ise hüküm (yargı) denir.

#### Örnek...20 :

p:"2=3"

q:"Pazar bir hafta sonu günüdür" önermeleri için  $p \Rightarrow q$  ve  $q \Rightarrow p$  önermelerini yazınız.

$p \Rightarrow q$  doğru ise  $p \Rightarrow q$  önermesine gerektirme denir ve "p gerektirir q" şeklinde okunur.

p ye gerektirmenin yeter koşulu (şartı) , q ya ise gerektirmenin gerek koşulu denir.

#### Örnek...21 :

p:"2 tek çift asal sayıdır"

q:"asal sayıların iki tane pozitif böleni vardır" önermeleri için  $p \Rightarrow q$  önermesi gerektirme midir?

#### Örnek...22 :

$p \Rightarrow q$  önermesi verilsin. Bu önerme için :

1.  $q \Rightarrow p$  önermesine  $p \Rightarrow q$  önermesinin karşıtı
2.  $p' \Rightarrow q'$  önermesine  $p \Rightarrow q$  önermesinin tersi
3.  $q' \Rightarrow p'$  önermesine  $p \Rightarrow q$  önermesinin karşıt tersi denir

Yukarıda verilen tanıma göre ,

"Hava sıcak ise pi rasyonel bir sayıdır." önermesinin :

- i) karşıtı ii) tersi iii) karşıt tersini iv) değilini yazınız

#### Örnek...23 :

$(p \Rightarrow q) \equiv q' \Rightarrow p'$  olduğunu doğruluk tablosu ile gösteriniz.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

#### Örnek...24 :

$(p \Rightarrow q) \equiv p' \vee q$  olduğunu doğruluk tablosu ile gösteriniz

#### Örnek...25 :

$(p \wedge q) \Rightarrow q$  bileşik önermesinin en sade hali nedir?

#### Örnek...26 :

$(p' \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$  bileşik önermesinin en sade hali nedir?

**5. Ancak ve ancak Bağlacı :** p ve q iki önerme olsun. 'ancak ve ancak' bağlacı ile kurulan "p ancak ve ancak q" önermesi  $p \equiv q$  ise doğru aksi takdirde yanlıştır.

"p ancak ve ancak q" önermesi genellikle  $p \Leftrightarrow q$  ile belirtilir.

$p \Leftrightarrow q$  önermesine ancak ve ancak bağlacı ile yapılan iki yönlü koşullu önerme denir.

$p \Leftrightarrow q$  önermesi doğruysa bu önermeye çift gerektirme de denir.

#### Örnek...27 :

$p \Leftrightarrow q$  önermesinin doğruluk tablosunu yapınız.

p	q	$p \Leftrightarrow q$

#### Örnek...28 :

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  olduğunu tablo yaparak gösteriniz.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

#### Örnek...29 :

Hangileri kesinlikle doğrudur?

- $p \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \wedge p' \equiv 0$
- $1 \vee q \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- $0 \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

#### Örnek...30 :

- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q$  olduğunu
- doğruluk tablosu yaparak
  - önermeler cebiri kullanarak gösteriniz.

## MANTIK – 1

### ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

#### DEĞERLENDİRME

1) 4 önerme için bir tablo hazırlandığında bu tabloda en çok ve en az satır sayısı kaç olur?

2) n farklı önerme için 512 değişik durum mevcutsa, n kaçtır?

3)  $\{(0 \vee 1) \wedge (1 \wedge 0)\}'$

4)  $p \vee 0 \equiv 1$   
 $1 \wedge q \equiv 0$  ise  $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$  önermesi neye denktir?

5)  $p \equiv 1, q \equiv 0, r \equiv 1, s \equiv 1$  ve  $k \equiv 0$  olduğuna göre  $\{(p \wedge q) \vee k'\} \wedge (q' \vee s)$  bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz

6)  $(p \vee p') \wedge (q \Rightarrow q \vee q) \equiv ?$

7) “ $2^3 \leq 3^2$  ise kar beyazdır” önermesinin karşıtı, tersi, karşıt tersi ve değili nedir? (tanımlar için Örnek 22 ye bakınız)

8)  $(\{p \vee q\} \Leftrightarrow q) \vee p \equiv 1$  olduğunu  
a) doğruluk tablosu yaparak  
b) önermeler cebiri kullanarak gösteriniz.

9) Bir bileşik önerme kendisini oluşturan önermelerin her biri için daima doğru oluyorsa bu bileşik önermeye totoloji; daima yanlış oluyorsa bu önermeye çelişki denir.

Buna göre, p ve q önermeleri için

I.  $p \vee p'$

II  $p \Leftrightarrow p'$

III.  $p \vee (q \vee p')$

IV.  $(p' \wedge q) \wedge (q' \vee p)$

V.  $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$

önermelerinden totoloji ya da çelişki belirtenleri bulunuz.

## MANTIK – 2

### AÇIK ÖNERMELER -NİCELEYİCİLER

#### AÇIK ÖNERMELER

İçerisinde değişken olan ve değişkenin değerlerine göre doğru ya da yanlış olabilen önermelere açık önerme denir.

Açık önermeler değişkenine göre  $P(x), q(a), k(x,y)$  biçimleriyle gösterilebilirler.

Denklemler ve eşitsizlikler açık önermelerdir

#### Örnek...1 :

$P(x)$ : “x bir tamsayı ve  $x^2 \leq 10$ ” önermesi  $x=-1,3$  için doğru  $x=5$  için yanlıştır.

**Doğruluk Kümesi** : Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine doğruluk kümesi denir.  
Bir a değeri ,  $p(x)$  açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı ise  $p(a) \equiv 1$  ,değil ise  $p(a) \equiv 0$  dır.

#### Örnek...2 :

$P(x)$ : “x bir tamsayı ve  $x^2 \leq 10$ ” önermesinin doğruluk kümesi D ise bu kümeyi bulunuz.

#### Örnek...3 :

$P(x)$ : x bir tamsayı ,  $(x-2)(x-1)(2x+3)=0$  önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

#### Örnek...4 :

$P(x,y)$ : x,y birer doğal sayı ,  $3x+2y=30$  önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

#### Örnek...5 :

$P(x,y)$ : x,y birer doğal sayı ,  $x+5y=20$  önermesi için  $P(10,k) \equiv 1$  ise k kaçtır?

#### NİCELEYİCİLER

Kesin olarak doğru veya yanlış hüküm içeren ifadeler önerme denir.  
Matematikte “bazı”, “her”, “bir tek” gibi niceleyicilerle de yapılan önermeler de vardır.

#### Örnek...6 :

p: “ Bazı doğal sayılar asaldır.”  
q: “ Her reel sayının karesi 0'dan büyüktür”

“Bazı” niceleyicisi ile yapılan önermelerin doğruluğunu gösterebilmek için en az bir doğru örnek gösterilebilmesi ; “her” niceleyicisi ile yapılan önermelerin doğru olmadığını gösterebilmek için bir tane yanlış örnek göstermek yeterlidir.

#### Örnek...7 :

p: Bazı Doğal sayılar tektir.  
q: her reel sayı çifttir.  
r: her sayı 15'e kalansız olarak bölünebilir.  
önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz

## MANTIK – 2

### AÇIK ÖNERMELER -NİCELEYİCİLER

Matematikte varlıksal niceleyici denen bazı sözcüğü sembolü ile  $\exists$  ; evrensel niceleyici denilen her sözcüğü ise  $\forall$  sembolü ile ; bir tek niceleyicisi ise  $\exists!$  veya  $\exists^*$  sembolü ile belirtilirler.

Bazı niceleyicisinin olumsuzu her niceleyicisi ; her niceleyicisinin olumsuzu ise bazı niceleyicisidir.

#### Örnek...8 :

p: "Bazı sayılar asaldır" , önermesinin olumsuzu  
p' : "Her sayı asal değildir" , önermesidir.

Her bütün ve tamamı sözcükleri aynı anlamda kullanılabilir

Verilen bir önermeyi q(x) ve bu önermenin olumsuzunu q'(x) ile gösteriyorsak  
q(x) : " $\exists x : p(x)$ " önermesinin olumsuzu  
q'(x) : " $\forall x : p(x)$  değil" önermesidir.

#### Örnek...9 :

Önermelerin değillerini bulunuz

p:" Bazı doğal sayılar asaldır."

q:" Her tamsayı 5'e kalansız bölünür."

n: "Bazı günler tatilse her doğal sayı asaldır."

r:  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x \leq 0$

t:  $(\exists x \in \mathbb{R} : 4^x \leq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : 2x > 1)$

m:  $(\forall x \in \mathbb{R} : 2x \leq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : x > 1)$

### DEĞERLENDİRME

1) t:  $(\exists x \in \mathbb{N} : x^2 > 1)$  önermesinin değilini bulunuz

2) t:  $(\forall x \in \mathbb{Z} : 4^x \neq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N} : 2-x < 3)$  önermesinin karşı tersi nedir?

n bir doğal sayı olmak üzere, açık önermelerin doğruluk değerini belirtiniz.

3)  $\forall n > 3, p(n): n! > 3^n$

4)  $\forall n > 0, p(n): 7^n - 1$  sayısı 2 ile bölünebilir.

5)  $\forall n > 0, p(n): n^3 - n$  sayısı 3 ile bölünebilir.

# KÜMELER - 1

## TEMEL KAVRAMLAR

### KÜME KAVRAMI

Küme matematiğin tanımsız bir kavramıdır. Ancak kümeyi, iyi tanımlanmış kavram veya nesnel topluluğu diye tarif edebiliriz. Kümeler A, B, X, K, ... gibi büyük harflerle gösterilir. Bir kümeyi oluşturan nesnelere her birine bu kümenin elemanı (ögesi) denir. Kümede her eleman bir kez yazılır.

#### Örnek...1 :

A={Bazı kızlar} Küme değil (iyi tanımlanmamış)  
K={Güzel renkler} Küme değil (iyi tanımlanmamış)

Aşağıdakiler de küme örneğidir.  
B={Tek tamsayılar}

C={Asal negatif tamsayılar}

L={x : x ∈ Z , x>0 , 2x+9<0}

M={x: x, 8 sayısının pozitif tamsayı bölenidir}

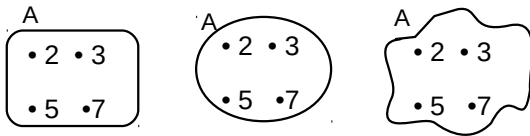
D = { x : x, DROGBA kelimesinin harfleri }

Z= {5 ten fazla harf içeren haftanın günleri}

### LİSTE, ORTAK ÖZELLİK VE ŞEMA YÖNTEMİ

**LİSTE YÖNTEMİ** : A={2, 3, 5, 7} = {5, 3, 2, 7}  
Elemanların farklı sırada yazılması yeni küme oluşturmaz.

#### ŞEMA YÖNTEMİ (VENN ŞEMASI):



#### ORTAK ÖZELLİK YÖNTEMİ :

A = {x : x<8 ve x asal sayı}  
= {x | x, rakam olan asal sayı} = {2, 3, 5, 7}

#### Örnek...2 :

P = {x|x, MATEMATİK kelimesinin harfleri}  
kümelerini liste biçiminde yazıp şema ile gösteriniz.

#### Örnek...3 :

N={-2, -1, 1, 2} kümesini ortak özellik yöntemiyle yazınız.

### ELEMAN SAYISI

A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.  
Bir a elemanı A kümesine ait ise  $a \in A$  yazılır ve "a elemanı A" diye okunur.  
Bir b elemanı A kümesine ait değilse  $b \notin A$  yazılır ve "b elemanı değil A" diye okunur.

#### Örnek...4 :

A = { a, b, c, d, {a}, {b,c} } kümesi veriliyor.  
Aşağıdakilerin doğru mu yanlış mı olduğunu yazınız.

.....	{a} ∈ A	{b, d} ∈ A	.....
.....	{b, c} ∉ A	d ∈ A	.....
.....	{b, c} ∈ A	b ∈ {b, c}	.....
.....	{d} ∈ A	s(A) = 6	.....
.....	{{a}, b} ∉ A	A'nın eleman sayısı 7 dir.	.....

### BOŞ KÜME

Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve  $\emptyset$  (fi) ya da { } sembollerinden birisi ile gösterilir.

### UYARI

{  $\emptyset$  } gösterimi boş küme belirtmez.

### SONLU KÜME VE SONSUZ KÜME

Bir A kümesinin öğeleri sayısı (nicelik sayısı) bir doğal sayı ise, A'ya sonlu küme denir.

S = {Sesli harfler}

C = {Yeryüzündeki tüm canlılar kümesi}

Sonlu olmayan bir kümeye de sonsuz küme denir.

N = {0, 1, 2, 3, .....}

$[-2, 3) = \{x : -2 \leq x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

$(a, a+1] = \{x : a < x \leq a+1, a \in \mathbb{R}\}$

# KÜMELER - 1

## TEMEL KAVRAMLAR

### Örnek...5 :

Aşağıdaki kümelerin boş, sonlu ve sonsuz olanlarını belirtiniz.

	Boş	Sonlu	Sonsuz
A={Rakamların kümesi}			
B={Türkiye'nin C harfi ile başlayan il isimleri}			
C={Sayı doğrusu üzerindeki noktalar}			
D={Haftanın günleri}			
E={1, 2, 3, ...}			
F={Asal sayılar}			

### ALT KÜME

A' nın her bir elemanı B' nin de bir elemanı oluyorsa " A kümesine B kümesinin alt kümesi " denir ve  $A \subset B$  biçiminde gösterilir.  
 $A \subset B$  gösterimi, "A, B' nin alt kümesidir" diye okunur.  
 $B \supset A$  gösterimi ise "B, A' yı kapsar" diye okunur.

A kümesinin bir alt kümesini oluşturmak için A' nın elemanlarından en az sıfır ve en çok A' nın eleman sayısı kadar eleman seçer ve yeni küme oluştururuz.

### Örnek...6 :

$A=\{1,2\}$  kümesinin tüm alt kümelerini kurunuz.

0 elemanlı	1 elemanlı	2 elemanlı

### Örnek...7 :

$B = \{ a, b, \{c\} \}$  kümesinin tüm alt kümelerini yazınız.

### ALT KÜME ÖZELLİKLERİ

- 1)  $A \subset A$  dır. (Her küme kendisinin alt kümesidir.)
- 2)  $\emptyset \subset A$  dır. (Boş küme her kümenin alt kümesidir.)

### ÖZALT KÜME

Bir kümenin **kendisinden farklı** olan her alt kümesine bu kümenin özalt kümesi denir.

### Örnek...8 :

$A = \{ 1, 2, x \}$  kümesinin özalt kümelerini yazınız.

### ALT KÜME VE ÖZALT KÜME SAYISI

n elemanlı A kümesinin alt kümelerinin sayısı  $2^n$  tanedir.  
A' nın özalt kümeleri sayısı ise  $2^n - 1$  tanedir.

### Örnek...9 :

$A = \{ a, b, \{b,c\}, (b,c), d \}$  kümesinin kaç tane alt kümesi vardır?

### Örnek...10 :

Bir A kümesinin 256 tane alt kümesi olduğuna göre, A kümesi kaç elemanlıdır?

### Örnek...11 :

Bir B kümesinin 511 tane özalt kümesi olduğuna göre, B kümesi kaç elemanlıdır?

## KÜMELER - 1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### Örnek...12 :

$A = \{ a, b, c, d, e, f \}$  kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde,

- i) a bulunur?
- ii) a bulunur, f bulunmaz?
- iii) c ve d birlikte bulunur?
- iv) c veya d bulunur?
- v) c ya da d bulunur
- v) En az bir sesli harf bulunur?
- vi) En çok bir sesli harf bulunur?

#### EŞİT KÜME

**EŞİT KÜME:** Elemanlarının tümü aynı olan kümelere denir ve “ = ” sembolü ile gösterilir.

( $A \subset B$  ve  $B \subset A$ ) ise  $A = B$  dir.

Eşit kümelerin eleman sayıları eşittir.  
Eleman sayıları aynı olan kümeler eşit olmak zorunda değildir

#### Örnek...13 :

$A = \{x : x^2 = 1, x \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x : x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$   
 $C = \{x : |x| < 2, x \neq 0, x \in \mathbb{Z}\}$   $D = \{x : |2 - x| = 3\}$   
kümelerinden hangileri eşit kümelerdir?

#### Örnek...14 :

"Bir A kümesinin tüm alt kümelerinin oluşturduğu kümeye A kümesinin kuvvet kümesi denir ve genellikle  $P(A)$  ile gösterilir." Yukarıda verilen bilgiye göre,  $A = \{ a, b, c \}$  kümesinin kuvvet kümesini yazınız.

#### Örnek...15 :

$A = \{ a, b, c \}$  kümesinin kuvvet kümesi olan kümenin alt küme sayısı kaçtır?

#### Örnek...16 :

$A = \{ a, b, c, d, e \}$  kümesinin en çok 1 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

#### Örnek...17 :

Doğal sayıların bir K alt kümesinin en büyük elemanı 100' dür. K kümesinin herhangi bir alt kümesi L olsun. L herhangi iki elemanının toplamını içermediğine göre, L kümesi en çok kaç elemanlıdır?

## KÜMELER – 1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### DEĞERLENDİRME – 1

- 1) Aşağıda verilen cümlelerdeki noktalı yerleri doğru bir şekilde doldurunuz.
- a) Küme matematiğinin ..... bir kavramıdır.
- b) Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine ..... denir.
- c) Kümede her eleman ..... yazılır.
- d) x elemanı K kümesine ait ise ..... biçiminde yazılır.
- e) x elemanı K kümesine ait değilse ..... biçiminde yazılır.
- f) Kümeler ..... farklı şekilde gösterilir. Bunların isimleri ..... yöntemi, ..... yöntemi ve ..... yöntemidir.
- g) A kümesinin eleman sayısı ..... biçiminde gösterilir.
- h) Hiç elemanı olmayan kümeye ..... küme denir, ..... ya da ..... şeklinde gösterilir.
- ı) Bir A kümesinin eleman sayısı doğal sayı ise, A ya ..... küme denir.
- i) Nicelik sayısı doğal sayı olmayan bir kümeye .....küme denir.
- j) Yalnızca eleman sayıları birbirine eşit olan kümelere .....küme denir. A ve B kümeleri .....ise A .... B şeklinde yazılır.
- k) Tüm elemanları aynı olan kümelere ..... küme denir. A ve B kümeleri ..... ise A .... B şeklinde yazılır.
- l) A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise..... kümesine ..... kümesinin alt kümesi denir ve .....  $\subset$  ..... şeklinde yazılır.
- m) A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise ..... kümesi ..... kümesini kapsar denir ve B .... A şeklinde yazılır.
- n) A kümesinin tüm alt kümelerinin oluşturduğu kümeye A kümesinin ..... kümesi denir ve ..... şeklinde gösterilir.
- o) Bir kümenin kendisinden farklı olan her alt kümesine bu kümenin ..... kümesi denir.

#### Kullanacağınız kelime listesi

sonlu	sonsuz	$\equiv$	eşit	B	A	eşit
eleman	liste	boş	denk	P(A)	{ }	3
kuvvet	özalt	=	bir defa	B	$x \notin K$	A
$x \in K$	denk	A	ortak özellik	A	B	$\supset$
$\emptyset$	tanımsız	s(A)	Venn şeması			

- 2) Aşağıdaki tabloda verilen ifadelerin küme belirtenlerini “ ✓ ”, belirtmeyenlerini “ ✗ ” ile işaretleyiniz.

Küme Adayı İfade	Küme
Doğal sayılar.	
Güzel filmler.	
Yeryüzünde yaşayan tüm canlılar.	
Ankara Milli Kütüphanedeki bazı kitaplar.	
Uzaydaki tüm yıldızlar yığını.	
Bir çiftlikteki gagalı canlılar topluluğu.	
İki rakamlı negatif tam sayılar topluluğu.	
Ankara Milli Kütüphanedeki tüm kitaplar.	

- 3) Aşağıda verilen bilgilerde noktalı yerlere, doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazınız.

Bir kümede elemanların yerleri değiştiğinde kümenin ismi değişmez.	.....
Boş kümenin öz alt kümesi yoktur.	.....
Bir kümenin alt küme ve öz alt küme sayıları toplamı daima asaldır.	.....
Boş kümenin alt kümesi yoktur.	.....
Kanatlı insanlar topluluğu küme belirtir.	.....
$A = \{3, 7, 11, 15, \dots, 91\}$ ise $s(A) = 23$ tür.	.....

## KÜMELER - 1

### TEMEL KAVRAMLAR

- 4)  $A = \{1, 2, \{1,2\}, 3, 4, \{3,4\}, 5\}$  kümesine göre, aşağıda verilen bilgilerde noktalı yerlere, doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazınız.

.....	$\{1\} \in A$	$\{1,2\} \notin A$	.....
.....	$5 \in A$	$s(A) = 9$	.....
.....	$\{3, 4\} \in A$	$\{1,2\} \subset A$	.....
.....	$\{1,2,5\} \in A$	$2,3,4 \subset A$	.....
.....	$\{1,2\} \in A$	$\{3, 4\} \subset A$	.....
.....	$\{2, \{3,4\}\} \subset A$	$\{\{1,2,5\}\} \subset A$	.....
.....	A'nın eleman sayısı 7 dir.		

- 5) Aşağıda ortak özellik yöntemiyle verilen kümelerin elemanlarını liste yöntemiyle yazınız.

a)  $A = \{a : (a-2) \cdot (a-1) \cdot a \cdot (2a+1) \cdot (a+2) = 0, a \in \mathbb{Z}\}$

b)  $B = \{b : b, 10 \text{ un katı olan iki basamaklı doğal sayılar}\}$

c)  $C = \{c : |c-3|=9, c \in \mathbb{Z}\}$

d)  $D = \{d : (d^2-16) \cdot (d^2+9) = 0, d \in \mathbb{Z}\}$

- 6) Aşağıdaki kümelerin eleman sayıları kaçtır?

a)  $A = \{x : 2^{x+3} \leq 128, x \in \mathbb{N}\}$

b)  $B = \{x : \sqrt{x-2} \leq 3, x \in \mathbb{N}\}$

c)  $C = \{x : |x-3| \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$

- 7) Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını hesaplayınız.

a)  $A = \{x : 13 \leq x \leq 94, x=2k, k \in \mathbb{Z}\}$

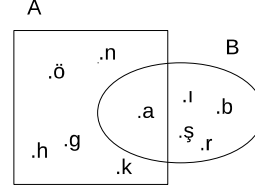
b)  $B = \{x : -4 \leq x \leq 105, x=3k, k \in \mathbb{Z}\}$

c)  $C = \{x : -40 < x \leq 85, x=5k, k \in \mathbb{Z}\}$

d)  $D = \{x : x < 127, x=5k+2, k \in \mathbb{Z}^+\}$

e)  $E = \{x : x=4k-1, 5 < k \leq 33, k \in \mathbb{Z}^+\}$

- 8) Aşağıdaki şekilde Venn şeması verilen A ve B kümeleri için;



- a) A ve B kümelerini liste yöntemiyle yazınız.

b)  $s(A) \cdot s(B)$  çarpımı kaçtır?

# KÜMELER – 1

## TEMEL KAVRAMLAR

### DEĞERLENDİRME – 2

- 1)  $A = \{x : x, 12 \text{ den küçük } 12 \text{ nin pozitif bölenleri}\}$  kümesinin elemanlarını liste yöntemiyle yazınız.
- 2) Aşağıda verilen kümeleri ortak özellik yöntemiyle yazınız.
- a)  $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- b)  $B = \{\dots -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$
- c)  $C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$
- 3) Aşağıdaki tabloda verilen kümelerin boş küme belirtenlerini "✓", belirtmeyenlerini "x" ile işaretleyiniz.

Küme	Boş Küme
$A = \{x : x, \text{negatif asal sayılar}\}$	
$B = \{x : x^2 + 4 = 0, x \in Z\}$	
$C = \{x : x+6=0, x \in Z\}$	
$D = \{x : x+6=0, x \in N\}$	
$K = \{\emptyset\}$	

- 4) Aşağıdaki kümelerin hangilerinin sonlu ya da sonsuz olduklarını yazınız.

Küme	Sonlu / Sonsuz
$A = \{\text{Bir yıl içindeki haftalar kümesi}\}$	
$B = \{x : x, 2012 \text{ yılında doğan çocuklar}\}$	
$C = \{x : 3 < x < 4, x \in R\}$	
Doğru parçası üzerindeki noktalar kümesi.	
$D = \{\}$	
Dünyadaki tüm canlılar kümesi.	
$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	
$K = \{a, b, c, d, e, f\}$	
$M = \{x \mid x \text{ tamsayı ve } 0 \leq x \leq 500\}$	
$N = \{x \mid x, 5 \text{ ile bölünebilen doğal sayı}\}$	

- 5)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin 2' yi eleman kabul eden kaç alt kümesi vardır?
- 6)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin en az 8 elemanlı kaç alt kümesi vardır?
- 7)  $A = \{x : x \text{ bir rakamdır}\}$  kümesinin kaç alt kümesinde **en az** bir asal sayı bulunur?
- 8)  $B = \{x : |x| < 4, x \in Z\}$  kümesinin alt kümelerinin kaçında 0 veya 1 vardır?
- 9) Asal rakamlar kümesinin, alt kümelerinin kaçında ne 2 ne de 3 vardır?
- 10) Alt kümelerinin sayısı 512 olan A kümesinin iki elemanı 1 ve 2 dir. A kümesinin kaç alt kümesinde 1 eleman olarak bulunurken, 2 bulunmaz?
- 11) Bir kümenin elemanlarını 2 arttırınca alt küme sayısı yüzde kaç artar ?
- 12) 4 elemanlı bir kümenin birbirini kapsamayacak şekilde **en çok** kaç alt kümesi vardır?
- 13)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  ve  $B = \{1, 2, 3\}$  veriliyor.  $B \subset K \subset A$  koşulunu sağlayan, A ve B den farklı kaç K kümesi yazılabilir?

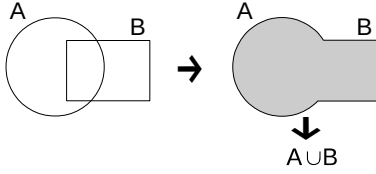
## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### İKİ KÜMENİN BİRLEŞİMİ

A ve B gibi iki kümeden, A' ya veya B' ye ait olan elemanlardan oluşan yeni kümeye A ile B' nin birleşimi denir ve **AUB** ile gösterilir. Bu gösterim "A birleşim B" diye okunur. Yani

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ veya } x \in B \} \text{ dir.}$$



#### Örnek...1 :

$A = \{ 2, 5, 6, 9 \}$  ve  $B = \{ 3, 5, 7, 9 \}$  ise  $A \cup B$  kümesini liste biçiminde yazınız.

#### Örnek...2 :

$A = \{ a, \{a\}, b, c, \{b, d\}, d \}$ ,  
 $B = \{ \{a\}, \{c, d\}, c, d, x, \Delta \}$   
kümeleri için  $s(A \cup B)$  kaçtır?

#### Örnek...3 :

$A = \{ x : -2 \leq x < 3, x \in \mathbb{Z} \}$ ,  
 $B = \{ x : -4 < x \leq 2, x \in \mathbb{Z} \}$   
kümeleri için  $A \cup B$  kümesini yazınız.

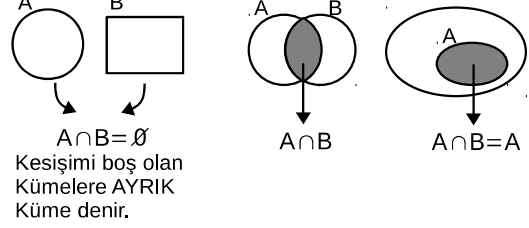
#### Örnek...4 :

$A = \{ x : -2 \leq x < 3, x \in \mathbb{R} \}$ ,  
 $B = \{ x : -4 < x \leq 2, x \in \mathbb{R} \}$   
kümeleri için  $A \cup B$  kümesini yazınız.

#### İKİ KÜMENİN KESİŞİMİ

A ve B gibi iki kümeden, A' ya ve aynı zamanda B' ye de ait olan elemanlardan oluşan kümeye A ile B' nin kesişimi (ara kesiti) denir ve **A ∩ B** ile gösterilir. Bu gösterim "A kesişim B" diye okunur. Yani

$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ ve } x \in B \}$  dir. Şemada taralı olan bölgeler kesişim (arakesit) kümeleridir.



#### Örnek...5 :

$A = \{ -2, 0, 1, 2, 3 \}$ ,  
 $B = \{ x : 0 \leq x < 5, x \in \mathbb{Z} \}$   
 $C = \{ x : 3 < x \leq 7, x \in \mathbb{Z} \}$   
kümeleri için  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cap C$  ve  $A \cap B \cap C$  kümelerini bulunuz.

$$A \cap B =$$

$$A \cap C =$$

$$B \cap C =$$

$$A \cap B \cap C =$$

#### Örnek...6 :

$A = \{ x : -2 < x < 5, x \in \mathbb{R} \}$ ,  
 $B = \{ x : x > 3, x \in \mathbb{R} \}$  kümeleri için  $A \cap B$  kümesini bulunuz.

#### Örnek...7 :

$A = \{ x : -4 \leq x < 6, x \in \mathbb{R} \}$   
 $B = \{ x : |x| < 7, x \in \mathbb{R} \}$   
 $C = \{ x : -3 < x \leq 5, x \in \mathbb{R} \}$   
olduğuna göre,  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  kümesini yazınız.

## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### BİRLEŞİM VE KESİŞİMİN ÖZELLİKLERİ

- 1)  $A \cup \emptyset = A$       2)  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 3) **Tek kuvvet özeliği**      4) **Değişme özeliği**  
 $A \cup A = A$        $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap A = A$        $A \cap B = B \cap A$
- 5) **Birleşme özeliği**  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$        $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- 6) **Dağılma özeliği**  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 7)  $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
- 8)  $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

#### Örnek...8 :

$A = \{1, 2, 3\}$   
 $A \cup B = \{1, 2, 3, a, 5, 7\}$   
koşullarını sağlayan B kümesinin 1 elemanlı alt kümeleri en çok kaç tanedir?

#### Örnek...9 :

A, B, C ve D üç küme olmak üzere,  
 $A \cup [DU\{(B \cap A) \cup C\}] \cap A$  ifadesinin en sade hali nedir?

#### Örnek...10 :

A kümesinin alt kümelerinin sayısı 128,  $A \cap B$  kümesinin özalt kümelerinin sayısı 15,  $A \cup B$  kümesinin alt kümelerinin sayısı 512 dir. Buna göre, B kümesinin eleman sayısı çift olan alt küme sayısı kaçtır?

#### Örnek...11 :

$A = \{x \mid 10 < x < 200, x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$   
 $B = \{x \mid 10 < x < 200, x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$   
 $s(A \cup B)$  kaçtır?

#### Örnek...12 :

$s(A \cap B) = 10$ ,  $s(A \cap C) = 18$  olduğuna göre,  $s(A \cap (B \cup C))$  en çok kaç olabilir?

#### Örnek...13 :

$A_x = \{x \text{ in asal bölenleri}\}$  ve  
 $B_x = \{x \text{ in bir basamaklı bölenleri}\}$  ise

- a)  $A_{42} \cup B_{30}$  kümesini elemanları ile yazınız.
- b)  $s(B_{120}) - s(A_{96})$  değeri kaçtır?

## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

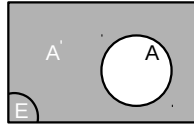
#### EVRENSEL KÜME

Bütün kümeleri kapsayan ve üzerinde işlem yapılan kümeye **evrensel küme** denir. Evrensel kümeyi genellikle E ile gösteririz.

#### BİR KÜMENİN TÜMLEYENİ

$A \subset E$  olmak üzere, E evrensel kümesinde olup, A da bulunmayan elemanların kümesine A kümesinin **tümleyeni** denir ve  $A'$  veya  $A^c$  ile gösterilir.

$A' = \{ x : x \notin A \text{ ve } x \in E \}$  yazılır.



#### Örnek...14 :

$E = \{ x : -4 < x < 7, x \in \mathbb{Z} \}$  evrensel kümesindeki  $A = \{ x : x < 3, x \in \mathbb{Z} \}$  kümesi için  $A'$  kümesini liste yöntemi ile yazınız.

#### Örnek...15 :

$E = \{ x : x, \text{ Rakam} \}$   
 $A = \{ x : x, \text{ Asal rakam} \}$   
 $B = \{ x : x, \text{ tek rakam} \}$  ise  $A', B', (A \cup B)'$  kümelerini yazınız.

#### EVRENSEL KÜME VE TÜMLEYEN ÖZELLİKLERİ

1) $E' = \emptyset$	2) $\emptyset' = E$
3) $(A')' = A$	4) $A \cap E = A$
5) $A \cup E = E$	6) $A \cup A' = E$
7) $A \cap A' = \emptyset$	8) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$
9) $A \subset E$ olmak üzere, $s(A) + s(A') = s(E)$ dir.	
10) De Morgan Kuralları: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	

#### Örnek...16 :

$s(A') = 8, s(E) = 21, s(B') = 15$  olduğuna göre,  $s(A) + s(B)$  toplamı kaçtır?

#### Örnek...17 :

A, B, C kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere,  
 $s(A) + s(B') = 13$   
 $s(B) + s(A') = 5$  ve  $s(C') = 3$  ise  $s(C)$  kaçtır?

#### Örnek...18 :

E evrensel kümesi sesli harflerimiz olmak üzere,  $A = \{ a, e, i \}$  ise  $A'$  kümesinin alt kümelerinin kaçında  $A'$  dan daha fazla sayıda eleman vardır?

#### Örnek...19 :

$A, B \subset E$  olmak üzere,  $B' \subset A'$  olduğuna göre,  $A \cap B$  nin eşiği nedir?

## KÜMELER – 2

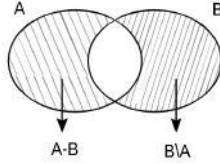
### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### Örnek...20 :

$A \subset E$  olmak üzere,  $s(A)=7-2x$  ve  $s(A')=2x+3$  olduğuna göre,  $E$  evrensel kümesinin asal sayıda eleman içeren kaç alt kümesi vardır?

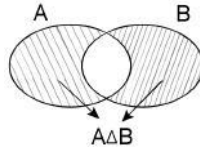
#### İKİ KÜMENİN FARKI

$A \subset E$  ve  $B \subset E$  olmak üzere  $A'$  da bulunan fakat  $B'$  de bulunmayan elemanların kümesine  $A$  fark  $B$  kümesi denir ve  $A - B$  veya  $A \setminus B$  ile gösterilir. Yani  $A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$  dir. Fark kümesinin Venn şeması ise



#### SİMETRİK FARK

$(A-B) \cup (B-A)$  kümesine simetrik fark denir ve  $A \Delta B$  ile gösterilir. Yani  $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$  dir.



#### FARK İŞLEMİNİN ÖZELLİKLER

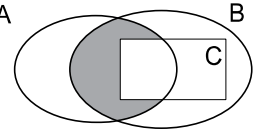
1) $A - B = A \cap B'$	2) $E - A = A'$
3) $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$	4) $A - B = A - (A \cap B)$
5) $(A - B)' = A' \cup B$	6) $(A - B) \cup B = A \cup B$
7) $A - A = \emptyset$	8) $\emptyset - A = \emptyset$
9) $A - E = \emptyset$	10) $A - \emptyset = A$
11) $A \neq B$ için $A - B \neq B - A$	
12) $A = B$ için $A - B = B - A = \emptyset$	
13) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$	
14) $(A \cap B) - (C \cap B) = (A \cap B) - C = A \cap B \cap C'$	
15) $s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$	

#### Örnek...21 :

$A = \{3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ ,  
 $B = \{-2, 4, 5, 7, 9\}$   
kümeleri için  $A - B$ ,  $B - A$  ve  $A \Delta B$  kümelerini yazınız.

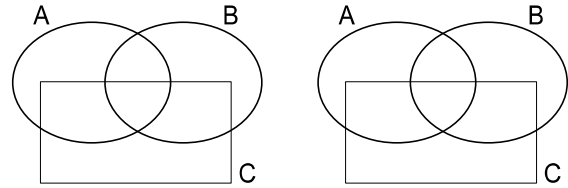
#### Örnek...22 :

$A$ ,  $B$  ve  $C$  kümelerinin yanda verilen şemasında taralı bölgenin sembolik yazımı nedir?



#### Örnek...23 :

$(A - B) - C$  ve  $A - (B \cup C)$  kümelerini aşağıdaki şemalar üzerinde belirtiniz.



#### Örnek...24 :

$A = \{x : -3 < x < 5, x \in \mathbb{Z}\}$  ve  $B = \{x : 1 < x < 5, x \in \mathbb{Z}\}$  ise  $B - A$  kümesini yazınız.

#### Örnek...25 :

$A - B = \{1, 2\}$  ve  $A \cup B = \{a, b, 1, 2, 3, 4, 5\}$  olduğuna göre,  $B$  kümesini liste biçiminde yazınız.

## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### Örnek...26 :

$s(A \cup B) = 34$ ,  $s(B - A) = 11$  ve  $s(A \cap B') = 18$  olduğuna göre,  $A \cap B$  kümesinin eleman sayısı kaçtır?

#### Örnek...27 :

$s(A) + s(B) = 24$ ,  $s(A \cup B) = 19$  ve  $s(A - B) = 3$  olduğuna göre,  $s(B - A)$  kaçtır?

#### Örnek...28 :

$A = \{\text{Sınıftaki gözlüksüz öğrenciler}\}$   
 $B = \{\text{Sınıftaki esmer öğrenciler}\}$   
 $C = \{\text{Sınıftaki erkek öğrenciler}\}$   
 $D = \{\text{Sınıftaki kız öğrenciler}\}$   
olduğuna göre,  $(A \cup D) - (A \cup B)$  kümesi hangi öğrencilerden oluşur?

#### Örnek...29 :

$s(A - B) = 6$  ve  $s(A) = 10$  ise  $A \cap B$  kümesinin en çok kaç elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

#### Örnek...30 :

A kümesinin alt kümelerinden 16 tanesi B kümesinin alt kümesi değildir.  
 $s(A \cup B) = 13$ ,  $s(A' \cap B) = 6$  olduğuna göre,  $s(A \cap B)$  kaçtır?

#### Örnek...31 :

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere  $(A \cup B)' \cup (B - A)$  ifadesinin en sade halini bulunuz ?

#### Örnek...32 :

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere  $(A - B)' - [A' \cap B']$  ifadesinin en sade halini bulunuz ?

**DEĞERLENDİRME – 1**

- 1) Aşağıda verilen cümlelerdeki noktalı yerleri doğru bir şekilde doldurunuz.
- a) Bütün kümeleri kapsayan ve üzerinde işlem yapılan kümeye ..... küme denir.
- b) E evrensel kümesinde olup, A' da bulunmayan elemanların kümesine A kümesinin ..... denir ve ..... veya ..... ile gösterilir.
- c) A' ya veya B' ye ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B' nin ..... denir ve ..... ile gösterilir.
- d) A ve B' ye ait olan elemanlardan oluşan kümeye A ile B' nin ..... ( ..... ) denir ve ..... ile gösterilir.
- e) A kümesi ile A' kümesinin birleşimi ..... küme oluşturur.
- f) A' da bulunan ancak B' de bulunmayan elemanların kümesine A ..... B kümesi denir ve ..... veya ..... ile gösterilir.

Kullanacağınız kelime listesi

kesişimi	birleşimi	fark	A – B	A'
tümleyeni	arakesiti	$A \cap B$	$A \setminus B$	
evrensel	evrensel	A'	AUB	

2)

Küme İfadesi	Sembolik gösterimi
A ve B' nin ortak elemanlarını içerir.	$A \cap B$
A veya B' nin elemanlarını içerir.	
A' da bulunan, B' de bulunmayan elemanları içerir.	
B' de bulunan, A' da bulunmayan elemanları içerir.	
Evrensel kümede olup A kümesinde olmayan elemanları içerir.	
Birleşim kümesinin arakesit elemanları dışındaki elemanları içerir.	

- 3) Aşağıdaki tabloda noktalı yerleri uygun şekilde doldurunuz.

$A \cup \emptyset = \dots\dots\dots$	$A \cap A = \dots\dots\dots$
$A \cup A = \dots\dots\dots$	$A \cap \emptyset = \dots\dots\dots$
$\emptyset' = \dots\dots\dots$	$(A')' = \dots\dots\dots$
$A \cap A' = \dots\dots\dots$	$A \cup E = \dots\dots\dots$
$E' = \dots\dots\dots$	$E - A = \dots\dots\dots$
$(A \cup B)' = \dots\dots\dots$	$A \cup A' = \dots\dots\dots$
$A \cap E = \dots\dots\dots$	$(A \cap B)' = \dots\dots\dots$
$A \cap B' = \dots\dots\dots$	$(A - B)' = \dots\dots\dots$
$(A - B) - C = A \dots\dots (B \dots\dots C)'$	
$s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B) = \dots\dots\dots$	
$(A - B) \cup (B - A) = \dots\dots\dots$	
$s(A) + s(B) - s(A \cap B) = \dots\dots\dots$	

- 4) Aşağıda verilen bilgilerde noktalı yerlere, doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazınız.

.... :	$A' = (A - B) \cup (B - A)$
.... :	$s(A \cup B) = s(A) + s(A \cap B) - s(B)$
.... :	$(A' \cup B)' = A - B$
.... :	$E - A = A'$
.... :	$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) + s(A \cap B) + s(A \cap C) + s(B \cap C) - s(A \cap B \cap C)$
.... :	$A - B = A - C$ ise $B = C$

- 5)  $K = \{1,2,3,\{4,5\}\}$ ,  $P = \{1,2,3,4,5\}$  ve  $R = \{2,4,6\}$  olduğuna göre, aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

	LİSTE YÖNTEMİ	alt küme sayısı
KUP		
$K \cap R$		
$K \cup (P \cap R)$		
$(P \cap R) \cup (K \cap R)$		

## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### DEĞERLENDİRME – 2

- 1)  $K = \{1, 3, 5, 7, 11\}$ ,  
 $L = \{x: x < 10, x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}^+\}$ ,  
 $M = \{x: x^2 \leq 32, x \in \mathbb{Z}\}$   
olduğuna göre,  $M \setminus (K \cap L)$  kümesinin elemanlarını liste yöntemiyle yazınız.
- 2)  $s(A) = 9$ ,  $s(B) = 15$  ve  $s(A \cup B) = 18$  olduğuna göre,  $A \cap B$  kümesinin eleman sayısı kaçtır?
- 3) A kümesinin alt küme sayısı 1024 ve  $s(A \cup B) = 26$  olduğuna göre,  $s(B)$  nin en küçük ve en büyük değerleri toplamı kaçtır?
- 4)  $A = (-7, 3]$ ,  $B = (6, 11)$  ve  $C = [3, 6)$  kümeleri aralık olarak veriliyor. Aşağıda verilen küme işlemlerini yapınız.

$A \cup C =$	$(A \cup C) \cap B =$
$B \cup C =$	$A \cap C =$
$A^c =$	$(A \cup C)^c =$

- 5) Yandaki şemada verilen K sayılar buldukları bölgedeki eleman sayılarını göstermektedir.
- 
- $s(K \cup R) = 43$  olduğuna göre,  $R$  kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- 6) K ve M kümeleri için  $K \not\subseteq M$  ve  $M \not\subseteq K$  olmak üzere,  $s(K \cup M) = 13$  ve  $s(K \cap M) = 6$  olduğuna göre, K kümesinin eleman sayısı en çok kaç olabilir?

- 7)  $A = \{x : 18 < x \leq 105, x \in \mathbb{N}\}$  kümesinin elemanlarının kaç tanesi, 3 ve 5 ile tam bölünebilir?

- 8)  $A = \{x : 18 < x \leq 105, x \in \mathbb{N}\}$  kümesinin elemanlarının kaç tanesi, 6 veya 9 ile tam bölünebilir?

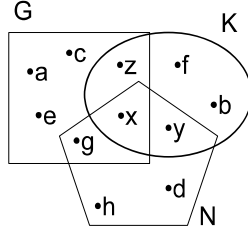
## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### DEĞERLENDİRME – 3

- 1)  $A \cap B = \{2, 5, 11\}$  ve  $A \cap C = \{2, 3, 7\}$  olmak üzere,  $A \cap (B \cup C)$  kümesinin elemanlarını ortak özellik yöntemiyle yazınız.

- 2) Venn şeması ile verilenlere göre,  $(G \cup K) \cap (G \cup N)$  kümesinin elemanlarını liste biçiminde yazınız.



- 3)  $s(A) = 3a+4$   
 $s(A \cap B) = 2a-3$   
 $s(B) = 8$   
 $s(A \cup B) = 5a-1$  olduğuna göre, a'nın değeri kaçtır?

- 4)  $A = \{x \mid 24 < x \leq 156, x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$   
 $B = \{x \mid 36 \leq x < 144, x = 6k, k \in \mathbb{Z}\}$  olduğuna,  $s(A \cup B)$  değeri kaçtır?

- 5)  $\frac{s(A \cup B)}{7} = \frac{s(A \cap B)}{2} = \frac{s(A)}{5}$  ve  $s(B) = 12$  olduğuna göre,  $s(A \cup B)$  kaçtır?

- 6)  $2 \cdot s(A \cap B) = 3 \cdot s(A \cap C) = s(B \cap C)$   
 $s(A) + s(B) + s(C) = 53$   
 $s(A \cap B \cap C) = 3$ ,  $s(A \cup B \cup C) = 34$  olduğuna göre,  $s(A \cap B)$  kaçtır?

- 7)  $A = \{x \mid 25 < x < 200, x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$   
 $B = \{x \mid 10 < x < 170, x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$   
 $s(A - B)$  kaçtır?

- 8)  $B \not\subset C$  olmak üzere,  $s(A \cap B) = 10$ ,  
 $s(A \cap C) = 18$  olduğuna göre,  $s(A \cap (B \cup C))$  en az kaç olabilir?

- 9)  $s(A) = 6$  ve  $s(B \setminus A) = 4$  olduğuna göre,  $s(A \cup B)$  kaçtır?

## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### DEĞERLENDİRME – 4

1)  $s(E)=25$ ,  $s(A-B)=11$  ve  $s(A' \cap B') = 5$  olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

2)  $s(A) = 16$  ve  $s(A \cap B) = 7$  olduğuna göre,  $s(A \setminus B)$  kaçtır?

3)  $s(A \cup B) = 22$  ve  $s(A \setminus B) = 14$  olduğuna göre, B kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

4)  $(A \cup B)' = \emptyset$ ,  $s(A \cup A') = 18$ ,  $s(A \cap B) = 4$  ve  $s(B - A) = 7$  olduğuna göre,  $A - B$  kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

5)  $s(A \setminus B) = 5$ ,  $s(B \setminus A) = 8$  ve  $s(A \cap B) = 7$  olduğuna göre,  $s(A \cup B)$  kaçtır?

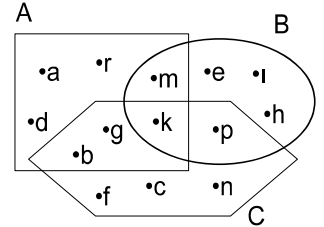
6)  $A = \{a, b, c, d\}$   
 $B = \{b, d, e, f, g, h\}$   
 $C = \{c, d, g, h, x, y\}$  kümeleri veriliyor.

a) Sadece B kümesinde bulunan elemanları yazınız.

b) B ve C' de bulunup A' da bulunmayan elemanları yazınız.

c) A veya B' de bulunup C' de bulunmayan elemanları yazınız.

7) Şekilde verilen Venn şemasına göre, aşağıdaki tabloyu doldurunuz.



$A - C = \{d, a, r\}$	$(A \cup C) \cap B = \{ \quad \}$
$B \setminus C = \{ \quad \}$	$(A \cap C) \setminus B = \{ \quad \}$
$A' - B = \{ \quad \}$	$(C - A) - B = \{ \quad \}$
$C \cap A' = \{ \quad \}$	$C \setminus (A \cup B) = \{ \quad \}$
$[(A - B) \cup (B - A)] - C = \{ \quad \}$	

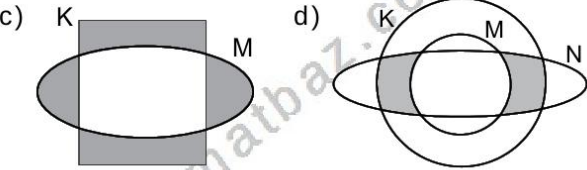
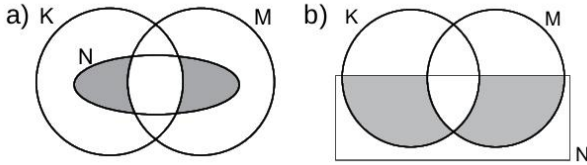
## KÜMELER – 2

### KÜMELERDE İŞLEMLER

#### DEĞERLENDİRME – 5

- 1) E evrensel küme ve  $A, B \subset E$  dir.  
 $s(A \cup B) = 25$  ve  $s(A \cap B) = 3$   
2.  $s(A) = 5$ ,  $s(B)$  ise  
 $A \setminus B$  kümesi kaç elemanlıdır?

- 2) Aşağıda Venn şeması ile verilen kümelerde taralı bölgeleri ifade eden kümeleri yazınız.



- 3)  $E = A \cup B$ ,  $s[(A-B)'] = 22$ ,  $s[(B-A)'] = 18$  ve  $s(A') + s(B') = 38$  olduğuna göre,  $A \cup B$  evrensel kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- 4)  $s(A-B)=12$ ,  $s[(B-A)']=26$  ve  $s(A' \cap B')=11$  olduğuna göre, A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- 5) A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir. Buna göre  $(A' \cap B')' - (A \cap B')$  ifadesinin en sade halini bulunuz.

- 6) E evrensel kümesi 48 elemanlıdır.  $s[(A \setminus B)'] = 32$ ,  $s(B) = 18$  ve  $s(B \setminus A) = 14$  olduğuna göre,  $A \cup B$  nin eleman sayısı kaçtır?

- 7) A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere  $\{[(A \cup \emptyset)' \cup (B \cap \emptyset)] - B\} \cup A'$  ifadesinin en sade halini bulunuz ?

- 8) A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$$s(A) = 5x-8, \quad s(A') = 2x-3,$$

$$s(B) = x-1, \quad s(B') = 2x+2$$

olduğuna göre, E evrensel kümesinin 1 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

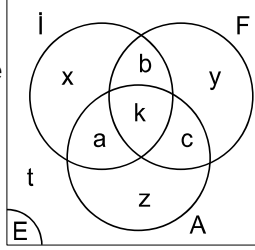
## KÜMELER – 3

### KÜME PROBLEMLERİ

#### KÜME PROBLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN GENEL STRATEJİ NEDİR?

- 1) Problemden verilenlere uygun şekil çizilir.
- 2) Bilinen değerler yerlerine yazıldıktan sonra yeteri kadar değişken kullanılarak elde edilen denklemlerle sonuca gidilir.
- 3) Bazı sorularda tüm değişkenler bulunamasa da sonuç bulunabilir.

Yandaki Venn şemasında bir toplulukta İngilizce, Fransızca ve Almanca konuşanların kümesi  $\bar{I}$ ,  $F$  ve  $A$  ile gösterilip kümelerin içine eleman sayıları yazılmıştır. Aşağıdaki tabloda tanımlanan kümelerin sembolik gösterimi ve gösterimi yapılan kümelerin eleman sayıları belirtilmiştir.



Tanımlanan Küme	Küme Adı	Eleman Sayısı
Yalnız İngilizce konuşan	$\bar{I} - (F \cup A)$	x
İngilizce konuşan	$\bar{I}$	$x+a+b+k$
Tek dil bilenler	?	$x+y+z$
İki dil bilenler	?	$a+b+c$
Üç dil bilenler	$\bar{I} \cap F \cap A$	k
Fransızca ve Almanca bilenler	$F \cap A$	$k+c$
Yalnız Fransızca ve Almanca bilenler	$(F \cap A) - (\bar{I} \cap F \cap A)$	c
Fransızca bilmeyen ve Almanca bilmeyen	$F' \cap A'$	$x+t$
Almanca bilmeyen	$A'$	$x+b+y+t$
Fransızca bilmeyen ve İngilizce bilenler	$F' \cap \bar{I}$	$x+a$
Hiç dil bilmeyen	$(A \cup F \cup \bar{I})'$	t
En az iki dil bilenler	?	$a+b+c+k$
En çok iki dil bilenler	$E - (A \cap F \cap \bar{I})$	$a+b+c+x+y+z+t$
İngilizce veya Almanca bilenler	$\bar{I} \cup A$	$b+x+c+z+a+k$
İngilizce ya da Almanca bilenler	$(\bar{I}-A) \cup (A-\bar{I})$ $\bar{I} \Delta A$	$b+x+c+z$

#### Örnek...1 :

Bir sınıftaki öğrencilerden 16' sı basketbol, 22' si voleybol ve 11' i de her iki oyunu oynuyor. Bu sınıfta basketbol veya voleybol oynayan kaç kişi vardır?

#### Örnek...2 :

Japonca veya Rusça bilenlerden oluşan bir toplulukta 37 kişi vardır. Bu toplulukta yalnız Japonca bilenlerin sayısı yalnız Rusça bilenlerin sayısının 2 katıdır. Toplulukta 7 kişi her iki dili bildiğine göre, yalnız Japonca bilenler kaç kişidir?

#### Örnek...3 :

40 kişilik bir turist kafesinde Almanca, Fransızca ve İngilizce konuşulmaktadır. Yolcuların 3' ü her üç dili de bilmektedir. Yolculardan 7' si Fransızca ve Almanca, 9' u Fransızca ve İngilizce, 5' i yalnız Almanca, 7' si yalnız Fransızca, 6' sı da yalnız İngilizce bilmektedir. Yolculardan her biri bu dillerden en az birini bildiğine göre, yalnız Almanca ve İngilizce bilen kaç kişi vardır?

## KÜMELER – 3

### KÜME PROBLEMLERİ

#### Örnek...4 :

Bir sınıftaki öğrenciler İngilizce ve Almanca dillerinden en az birini bilmektedir. Almanca bilenlerin sayısı, İngilizce bilenlerin sayısının 3 katı ve her iki dili bilenlerin sayısının 8 katıdır. **Sınıf mevcudu 29 olduğuna göre, İngilizce bilenler kaç kişidir?**

#### Örnek...5 :

Futbol veya basketbol sporlarının yapıldığı bir grupta, futbol oynayanlar % 60, basketbol oynayanlar % 50 ve sadece basketbol oynayanlar 20 kişi ise **sadece futbol oynayanlar kaç kişidir?**

Sarışın(S) Esmer(M)		
Kız(K)	a	b
Erkek(E)	c	d

Yukarıdaki tablo bir sınıftaki öğrencilerle ilgili verileri içermektedir.

Tanımlanan Küme	Küme Adı	Eleman Sayısı
Kızların sayısı	K	a+b
Erkeklerin sayısı	E	d+c
Sarışınların sayısı	S	a+c
Esmerlerin sayısı	M	b+d
Kız ve sarışın	$K \cap S$	a
Kız veya esmer	$K \cup M$	a+b+d
Erkek veya sarışın olmayan	$E \cup S'$	c+d+b

#### Örnek...6 :

34 kişilik bir anadolu lisesi sınıfında, gözlüklü kız öğrenci sayısı 12' dir. Gözlüksüz erkeklerin sayısı gözlüksüz kızların sayısının 4 katı ve erkek öğrenci sayısı kız öğrenci sayısının 2 katından 11 eksik ise sınıftaki gözlüksüz kız öğrenci sayısı kaçtır?

#### Örnek...7 :

Bir gruptaki öğrencilerin 32' si sarışın 21' i esmerdir. Gruptaki sarışın erkekler esmer erkeklerden 5 kişi fazla ise **sarışın kızlar, esmer kızlardan kaç fazladır?**

#### Örnek...8 :

Bir sınıftaki öğrencilerin tümü A, B, C seçmeli derslerinden sadece ikisini seçmek zorundadır. A dersini seçen 15, B dersini seçen 26, C dersini seçen 13 kişi ise **sınıf mevcudu kaçtır?**

## KÜMELER – 3

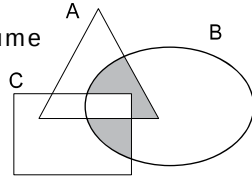
### KÜME PROBLEMLERİ

#### Örnek...9 :

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için,  
 $3 \cdot s(A - B) = 5 \cdot s(A \cap B) = 6 \cdot s(B - A)$   
olduğuna göre, **AUB kümesinin eleman sayısı en az kaçtır?**

#### Örnek...10 :

Yandaki şemada taralı küme aşağıdakilerden hangisine eşittir?



- A)  $A \cap B \cap C$
- B)  $(A \cap B) \setminus C$
- C)  $(C \cap B) \setminus A$
- D)  $(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$
- E)  $(B \cap (A \cup C)) \setminus (A \cap B \cap C)$

#### Örnek...11 :

Bir sınıfta Çince veya Japonca' dan en az birini bilen 42 öğrenci vardır. Çince bilenlerin sayısı, Japonca bilenlerin sayısının 3 katı, her iki dili bilenlerin sayısının ise 6 katıdır. Buna göre, sınıfta Çince bilenlerin sayısı kaçtır?

#### Örnek...12 :

Pozitif tamsayılardan oluşan

$$A = \{x \mid x < 76, x = 2k, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$B = \{x \mid x < 191, x = 3k, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, AUB kümesinin eleman sayısı kaçtır?

#### Örnek...13 :

$A \cap B \neq \emptyset$  olmak üzere,

$$s(B) = 4 \cdot s(A)$$

$$s(B \setminus A) = 5 \cdot s(A \setminus B)$$

olduğuna göre, B kümesi **en az** kaç elemanlıdır?

#### Örnek...14 :

E kümesi,  $\{1, 3, 5, 7\}$  kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulan ve rakamları birbirinden farklı dört basamaklı bütün doğal sayıların kümesidir. E' nin elemanlarından 7 rakamı 1 rakamının solunda olanlar A kümesini, 7 rakamı 3 rakamının sağında olanlar B kümesini oluşturuyor. Buna göre, AUB kümesinin eleman sayısı kaçtır?

## KÜMELER – 3

### KÜME PROBLEMLERİ

#### DEĞERLENDİRME

- 1) Mevcudu 30' dan az olan bir sınıfta gitar çalan herkes, piyano da çalabiliyor. Piyano çalanların sayısı, gitar çalanların sayısının 3 katıdır. Gitar çalamayanlar piyano çalamayanların 2 katı olduğuna göre, bu sınıftaki öğrenci sayısı en çok kaçtır?

A)24 B)25 C)26 D)27 E)28

- 2) 30 kişilik bir sınıftaki sarışın ve gözlüklü öğrencilerin sayısı sarışın olmayan gözlüksüz öğrencilerin sayısından 8 fazla, gözlüklü öğrencilerin sayısı, gözlüksüz öğrencilerin sayısının 2 katıdır. Buna göre sarışın olmayan öğrenci sayısı kaçtır?

A)10 B)12 C)15 D)18 E)20

- 3) İngilizce veya Fransızca dillerinden en az birinin konuşulduğu bir sınıfta İngilizce bilenlerin sayısı her iki dili de bilenlerin sayısının 3 katı, Fransızca bilenlerin sayısı sadece İngilizce bilenlerin sayısının 2 katıdır. Sınıf mevcudu kaç olabilir?

A)7 B)10 C)17 D)32 E)36

- 4) En az bir zayıf olan öğrencilerin bulunduğu bir sınıfta, %40' ı fizikten, %70' i biyolojiden kalmıştır. Her ikisinden kalan 6 kişi olduğuna göre sınıfta kaç öğrenci vardır?

A)30 B)40 C)60 D)70 E)110

- 5) Bir sitede oturan ailelerin % 70' inde DVD oynatıcı, % 60' ında bilgisayar vardır. Buna göre, yalnız DVD oynatıcısı olan aile sayısı en az kaçtır?

A)1 B)2 C)3 D)4 E)40

- 6) 66 kişilik bir sınıfta gözlüklü kızların sayısı gözlüksüz erkeklerin sayısının % 30' udur. Sınıftaki kız öğrenci sayısı erkek öğrenci sayısından 6 eksiktir. Sınıfta 6 tane gözlüklü erkek olduğuna göre, kaç tane gözlüksüz kız öğrenci vardır?

A)3 B)9 C)21 D)25 E)30

## KÜMELER – 4

### KARTEZYEN ÇARPIM

#### SIRALI İKİLİ

a ve b'nin (a,b) biçiminde tek bir eleman olarak yazılmasına **sıralı ikili** ya da kısaca **ikili** denir. Burada a' ya ikilinin birinci bileşeni, b' ye ise ikinci bileşeni denir.

Örneğin ; (4, -3) ve (m, n) bir sıralı ikilidir.

#### UYARI

İkilide sıra önemli olduğundan  $a \neq b$  için  $(a, b) \neq (b, a)$  dır.

#### UYARI

(a,b) **ikilisi** ile {a, b} **kümesi** de farklıdır. Yani,  $(a,b) \neq \{a,b\}$  dir.

#### SIRALI İKİLİLERİN EŞİTLİĞİ

İki sıralı ikilinin birinci bileşenleri birbirine ve ikinci bileşenleri birbirine eşitse bu sıralı ikililer eşittir denir. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani,

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \text{ ve } b = d)$  dir.

#### Örnek...1 :

$(4x-1, y-3) = (19, x^3+x)$  olduğuna göre, (x-y, x+y) sıralı ikilisini bulunuz.

#### Örnek...2 :

$$\left( \frac{2}{2x+1}, \frac{3y-1}{3} \right) = \left( \frac{3}{5}, \frac{-4}{3} \right)$$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

#### Örnek...3 :

$(2x - 3y, x + 2y) = (-4, -2)$  olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

#### KARTEZYEN ÇARPIM

A ve B herhangi iki küme olsun.  
 $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$  kümesine A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı** denir.  
 $s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$

#### Örnek...4 :

$A = \{1, 2, 3\}$  ve  $B = \{a, b\}$  kümeleri için,  $A \times B$  ve  $B \times A$  kümelerini liste biçimde yazınız.

#### Örnek...5 :

$A = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ ve } |x| < 2\}$  ve  
 $B = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ ve } x^2 < 6\}$  kümeleri için,  $s(A \times B)$  kaçtır?

#### Örnek...6 :

$A = \{a, b, c\}$  kümesi için  $A \times A$  kümesinin 5 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

#### Örnek...7 :

$A \times B = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5)\}$   
 $C \times D = \{(a, 2), (b, 4), (a, 4), (b, 2)\}$  olduğuna göre,  $s(B \times C)$  kaçtır?

## KÜMELER – 4

### KARTEZYEN ÇARPIM

#### KARTEZYEN ÇARPIMIN ÖZELİKLERİ

- 1)  $A \times A = A^2$
- 2) **BİRLEŞME ÖZELİĞİ**  
 $A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- 3) **DEĞİŞME ÖZELİĞİ**  
 $A \times B \neq B \times A$  ( $A \neq B$  için)
- 4) **DAĞILMA ÖZELİĞİ**  
 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$   
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$   
 $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

#### Örnek...8 :

$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, c), (1, b)\}$  olduğuna göre,  $s(A \times A) + s(B \times A)$  kaçtır?

#### Örnek...9 :

$A = \{s, o, y, u, t, b, i, r\}$   
 $B = \{c, e, b, i, r\}$  kümeleri veriliyor.  
 $s[(A \times C) \cap (B \times C)] = 60$  olduğuna göre,  $C$  kümesinin eleman sayısı kaçtır?

#### Örnek...10 :

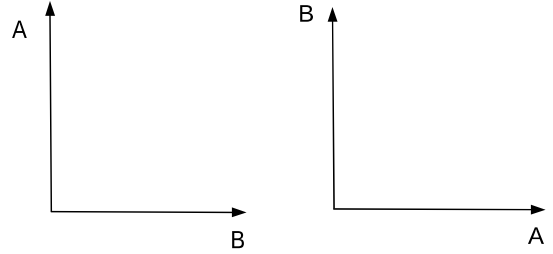
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinde tanımlı alt kümelerin biri  
 $K = \{(x, y) \mid x + 2y < 14\}$  ise  $s(K \times K)$  kaçtır?

#### KARTEZYEN ÇARPIMIN GRAFİĞİ

$A$  ve  $B$  boştan farklı herhangi iki küme olsun. Koordinat düzleminde, yatay eksen üzerine  $A$  kümesinin elemanları, düşey eksen üzerine ise  $B$  kümesinin elemanları işaretlenmek suretiyle oluşturulan sıralı ikililerin kümesi  $A \times B$  çarpımının grafiğini oluşturur.

#### Örnek...11 :

$A = \{1, 2, 3\}$  ve  $B = \{a, b\}$  kümeleri için,  $A \times B$  ve  $B \times A$  kümelerinin grafiklerini çiziniz.



#### Örnek...12 :

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$   
 $B = \{2, 3, 4\}$  kümeleri için,  $A \times B$  kartezyen çarpım kümesinin grafiğindeki noktaları dışarıda bırakmayan  
a) en küçük alanlı dikdörtgenin alanı kaç  $br^2$  dir?  
b) en küçük alanlı dairenin alanı kaç  $br^2$  dir?

#### Örnek...13 :

5 elemanlı bir kümenin kendisiyle kartezyen çarpımı ile elde edilen kümenin alt kümelerinin kaçında bileşenleri eşit olan ikililer yoktur?

## KÜMELER - 4

### KARTEZYEN ÇARPIM

#### DEĞERLENDİRME

1)  $(3a-7, 9) = (8, 2b-3)$   
sıralı ikilileri eşit olduğuna göre,  $a \cdot b$  çarpımı kaçtır?

2)  $(2x-3y, 7) = (51, 2x+y)$   
sıralı ikilileri eşit olduğuna göre,  $x \cdot y$  çarpımı kaçtır?

3)  $A \times B = \{(a,3), (a,5), (a,7), (b,3), (b,5), (b,7)\}$   
 $C \times D = \{(x,2), (x,4), (y,2), (y,4), (z,2), (z,4)\}$   
olduğuna göre,  $B \times D$  kümesini liste yöntemiyle yazınız.

4)  $A \times B = \{(a,3), (a,5), (a,7), (b,3), (b,5), (b,7)\}$   
olduğuna göre,  $B \times B = B^2$  kümesinin grafiğini çiziniz.

5)  $A = \{a, b, c\}$  ve  $B = \{2, 3\}$  olduğuna göre,  $s(A \times B \times A)$  değeri kaçtır?

6)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ve  $B = \{5, 7\}$  olduğuna göre,  $A \times B$  kümesinin en az 5 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

7)  $A$  ve  $B$  boştan farklı iki küme olmak üzere,  
 $s(B \cup C) = 8$   
 $s(A \times B) = 35$   
 $s[(A \times B) \cup (A \times C)] = 56$   
olduğuna göre,  $B$  kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

8)  $A$  ve  $B$  gibi iki kümenin arakesitlerinin alt küme sayısı 16'dır.  $s(B) = 7$  ve  $s[A \times (A \cup B)] = 108$  olduğuna göre,  $A \setminus B$  kümesinin eleman sayısı kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 1

### SAYI KÜMELERİ

#### RAKAM

Sayıları ifade etmek için kullandığımız 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sembollerine **rakam** denir .

#### Örnek...1 :

a, b ve c birbirlerinden farklı birer rakamdır.  
 $a.b+9.b-c$

en çok kaçtır?

#### Örnek...2 :

“Herhangi bir doğal sayının rakamlarının tersten yazılışı ile oluşan yeni sayı ilk sayıya eşit ise bu şekildeki sayılara palindrom sayı denir.”

Buna göre, aşağıdaki sayılardan kaç tanesi palindromdur?

123    404    6006    258825    111

#### Örnek...3 :

45 basamaklı 99.....9 sayısı, 234 ile çarpıldığında, elde edilen sayının rakamları toplamı kaçtır?

#### Örnek...4 :

n doğal sayı olmak üzere  $2^{(2^n)}+1$  biçimindeki sayılara Fermat asal sayıları denir. En çok iki basamaklı Fermat asallarının toplamı kaçtır?

#### UYARI

Rakamların çokluk belirtmek için bir arada (veya tek başlarına) kullanılmalarıyla sayılar elde edilir.  
**Bazı sayılar aynı zamanda rakamdır.**

## SAYI KÜMELERİ

#### DOĞAL SAYILAR

$N=\{0,1,2,3,\dots,n,\dots\}$   
kümesine doğal sayılar kümesi denir.

#### Örnek...5 :

a ve b farklı doğal sayılar olmak üzere,  $a+b=12$  ise a.b nin en büyük ve en küçük değerleri çarpımı kaçtır?

#### Örnek...6 :

a, b, c doğal sayılar olmak üzere,  
 $a.b=24$  ve  $a.c=36$   
ise  $a+b+c$  nin toplamı kaç farklı değer alır?

#### Örnek...7 :

1 den 99 a kadar olan tamsayılar soldan sağa doğru yan yana yazılarak  
 $a = 123\dots91011\dots9899$   
şeklinde 189 basamaklı bir a sayısı oluşturuluyor.  
Buna göre, a nın sağdan 126. rakamı kaçtır?

#### UYARI

Doğal sayıların iki alt kümesi asal sayılar  $A=\{2,3,5,7,11,\dots\}$  ve sayma sayıları  $S=\{1, 2, 3,\dots\}$  kümesi sıklıkla karşımıza çıkar.

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 1

### SAYI KÜMELERİ

#### Örnek...8 :

a ve b doğal sayıları için  $5a+b=17$  olduğuna göre,

- a ve b asal sayıdır.
- a çiftse b de çifttir.
- a ve b nin her ikisinde pozitifdir.

ifadelerinden hangisi veya hangileri daima doğrudur?

#### TAM SAYILAR

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, z, \dots\}$   
kümesine tam sayılar kümesi denir.

#### UYARI

$Z$  kümesinin  
 $Z_c = \{x: x=2k, k \in Z\} = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}$  ve  
 $Z_t = \{x: x=2k+1, k \in Z\} = \{\dots, -1, 1, 3, \dots\}$   
alt kümeleri sıklıkla karşımıza çıkar.

#### Örnek...9 :

x tek bir tamsayı ise kaç tanesi daima çifttir?

- $x+1$
- $x-1$
- $8x+6$
- $x^2+1$
- $x^2+x^3$

#### Örnek...10 :

$$12-6:3+2.5-7.3+1=?$$

#### Örnek...11 :

$$a-\{[a-3(b-2a)-(a-3b)]+a-2(2b-a)\}=?$$

#### Örnek...12 :

a, b, c tam sayılar olmak üzere,  
 $a.b=60$  ,  $a.c=48$  ise  $a+b+c$  nin toplamı en az kaç olur?

#### Örnek...13 :

A ve B farklı rakamlar ve AB ve BA iki basamaklı sayılar olmak üzere,  
 $AB+BA+BB+AA$  toplamı en az ve en çok kaçtır?

#### Örnek...14 :

Herbiri en az iki basamaklı 8 sayının her birinin birler basamağındaki rakam sayısal değer olarak 3 azaltılır, onlar basamağındaki rakam sayısal değer olarak 2 arttırılırsa sonuç nasıl değişir?

#### Örnek...15 :

Ardışık 5 tam sayının toplamı  $-245$  ise en büyük sayı kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 1

### SAYI KÜMELERİ

#### DEĞERLENDİRME – 1

- 1) Sayı doğrusunda işaretlenmiş a, b, c, d sayılarının toplamı 67 dir. Bu sayılardan en küçüğü a olmak üzere, a'nın diğer sayılarına uzaklıkları toplamı 31 ise a kaçtır?
- 2) n bir doğal sayı olmak üzere, 1 den n ye kadar olan doğal sayıların toplamı x, 7 dan n ye kadar olan doğal sayıların toplamı y ile gösteriliyor.  $x + y = 251$  olduğuna göre, x in değeri kaçtır?
- 3) Bir öğrenciden verilen bir x sayısını 45 ile çarpması istenmiş ve öğrenci cevabı 15 930 bulmuştur. Fakat işlemi kontrol ederken verilen x sayısının 2 olan onlar basamağını 5 görmüş olduğunun farkına varan bu öğrencinin bulması gereken doğru sonuç kaçtır?
- 4) a ve b doğal sayılar olmak üzere,  $a.b=60$  ise a+b nin en büyük ve en küçük değerleri toplamı kaçtır?
- 5) Üç basamaklı 9ab sayısı iki basamaklı ab sayısının 61 katıdır. Buna göre, a +b toplamı kaçtır?
- 6) abc üç basamaklı sayısı rakamları toplamının x katı, bca 3 basamaklı sayısı rakamları toplamının y katı ise cab 3 basamaklı sayısı rakamları toplamının kaç katıdır?
- 7) a, b, c tam sayılar olmak üzere,  
 $a.b < 0$  ,  $a.c > 0$  ,  $b^2.c > 0$   
ise a, b, c nin işaretleri sırasıyla nedir?
- 8)  $1-2+3-4+...-2014=?$
- 9) a, b, c negatif tam sayılar olmak üzere,  
 $5a=6b$  ,  $3a=7c$  ise a+b+c nin toplamı en çok kaç olur?
- 10) İki basamaklı ve birbirinden farklı üç tek sayının toplamı kaç farklı değer alır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER - 1

### SAYI KÜMELERİ

#### RASYONEL SAYI

a ve b tamsayılar ve  $b \neq 0$  koşuluyla  $q = \frac{a}{b}$  sayısına rasyonel sayı denir. Rasyonel sayılar kümesi  $\mathbb{Q}$  ile gösterilir ve  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  biçiminde yazılır.

#### KESİR ÇEŞİTLERİ

İşaretlerine bakılmaksızın payı paydasından büyük veya eşit olan kesirlere **bileşik kesir** denir. Pay mutlak değer olarak paydadan küçükse kesir **basit kesir**dir.

#### Örnek...1 :

$\frac{a}{7}$  kesri basit kesir ise a'nın alabileceği kaç farklı değer vardır?

#### Örnek...2 :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x-2}}$$

kesrini tanımsız yapan x değerleri toplamı kaçtır?

#### HATIRLATMA

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ise  $a \cdot d = b \cdot c$  dir. Burada  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  kesrine **denk kesirler** de denir

#### Örnek...3 :

$$\frac{x-2}{5} = \frac{x+1}{3} \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

#### RASYONEL SAYILARDA İŞLEMLER

$$1) \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{b \cdot d}$$

$$2) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$3) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

#### Örnek...4 :

$$\frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = ?$$

#### Örnek...5 :

$$(1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{6}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{400}) = ?$$

#### Örnek...6 :

$A = \frac{1}{9} + \frac{7}{13} + \frac{11}{7}$  ve  $B = \frac{17}{9} + \frac{32}{13} - \frac{4}{7}$  ise B'nin A türünden eşiti nedir?

#### HATIRLATMA

x bir tamsayı ve  $\frac{a}{b}$  bir kesir olmak üzere,  $x + \frac{a}{b}$  ifadesine bir **tamsayılı kesir** denir ve bu  $x \frac{a}{b}$  ile gösterilir. Örneğin;  $2\frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7} = \frac{18}{7}$  ve  $-5\frac{2}{3} = -(5 + \frac{2}{3}) = -\frac{17}{3}$  olur.

#### Örnek...7 :

$$(1 - 3\frac{1}{5}) : (1 - 2\frac{1}{6}) = ?$$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 1

### SAYI KÜMELERİ

#### ONDALIK AÇILIM

$\frac{x}{y}$  rasyonel sayısında x in y ile bölünmesiyle elde edilen sayıya  $\frac{x}{y}$  nin **ondalık açılımı** denir.

#### Örnek...8 :

$\frac{6}{25}$  sayısının ondalık açılımı nedir?

#### Örnek...9 :

$(0,728)^2 - (0,272)^2 = ?$

#### Örnek...10 :

$\frac{0,46}{0,23} + \frac{4,6}{0,23} + \frac{0,6}{0,03} - \frac{0,48}{0,4-1} = ?$

#### UYARI

Her rasyonel sayı bir devirli ondalık açılım olarak yazılabilir. Eğer virgölün sağında belli bir yerden sonra tekrar eden kısım var ise bu kısım üzerinde devir çizgisi konarak belirtilir. (0 için devir çizgisi yazılmaz)

Örneğin;  $\frac{7}{10} = 0,7000\dots = 0,7\bar{0} = 0,7$

$\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\bar{3}$

$\frac{19}{45} = 0,4222\dots = 0,4\bar{2}$  olarak yazılır.

#### DEVİRLİ ONDALIK SAYININ KESRE ÇEVİRİLMESİ

Sayının tamamı için  
tüm sayı – devretmeyen kısım  
devreden kadar 9 devretmeyen kadar 0  
Virgülden sonrası için

Örneğin;  $a, bcd = \frac{abcd - abc}{900}$

#### Örnek...11 :

$4,2\bar{3}$  sayısını kesre çeviriniz,

#### Örnek...12 :

$x = 3,4\bar{3}$        $y = 3,4\bar{3}$   
sayılarını sıralayınız?

$z = 3,434343$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER - 1

### SAYI KÜMELERİ

#### DEĞERLENDİRME - 2

1)  $\frac{a-2}{2} = \frac{3b-2}{4}$  ise  $2a-3b+4$  kaçtır?

2)  $1 - \frac{0}{2} + 3\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} + 1\right) = ?$

3) 
$$2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{\vdots}}}$$
  
işlemi sonsuza kadar devam ediyor.  
Bu işlemin sonucu kaçtır?

4)  $\left(\frac{12}{6}\right) : \frac{\frac{12}{6}}{5} = ?$

5)  $\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{25}\right) \dots \dots \left(1 - \frac{1}{225}\right) = ?$

6)  $x = \frac{1}{2} + \frac{7}{15} - \frac{5}{13}$  ise  $\frac{1}{2} - \frac{8}{15} - \frac{44}{13}$  sayısının x türünden eşiti nedir?

7)  $4\frac{7}{125}$  sayısının ondalık açılımı nedir?

8) x pozitif bir ondalıklı kesir olmak üzere,  $x + \frac{34}{125}$  bir tamsayı ise x sayısının virgülden sonraki kısmı nedir?

9)  $\frac{0,ab}{a,b} + \frac{a,0b}{0,a0b} = ?$

10)  $0,\bar{9} + 1,\bar{9} + 2,\bar{9} + \dots + 49,\bar{9} = ?$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER - 1

### SAYI KÜMELERİ

#### UYARI

$\sqrt{2}$  rasyonel değildir.

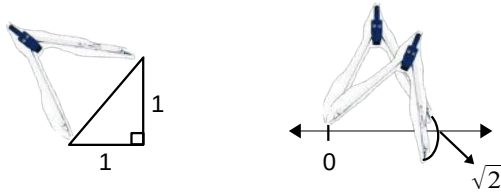
#### İSPAT :

#### Örnek...13 :

$\sqrt{253-x}$  sayısının bir rasyonel sayı belirtmesini sağlayan kaç  $x$  doğal sayı değeri vardır?

#### $\sqrt{2}$ SAYISINI SAYI DOĞRUSUNDA GÖSTERMEK İSTERSEK:

Dik kenarları 1 er birim olan dik üçgende hipotenüs uzunluğunda pergelimizi açar ve bu açıklığı sayı doğrusunda sivri uç 0'a gelecek şekilde bir yay çizerek bulabiliriz.



$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi=3,14\dots, e=2,7\dots$  gibi devirli ondalık açılıma sahip olmayan sayılara **irrasyonel sayı** denir.

İrrasyonel sayılar kümesi  $\mathbb{Q}^I$  ile gösterilir.  
Rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerinin birleşimi reel sayılar kümesini oluşturur.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^I = \mathbb{R}$$

#### REEL SAYILAR KÜMESİ VE TOPLAMA İŞLEMİ

##### 1. KAPALILIK ÖZELLİĞİ :

Her  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $a+b \in \mathbb{R}$  dir.

##### 2. DEĞİŞME ÖZELLİĞİ :

Her  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $a+b=b+a$  dir.

##### 3. BİRLEŞME ÖZELLİĞİ :

Her  $a, b, c \in \mathbb{R}$  için  $a+(b+c)=(a+b)+c$  dir.

##### 4. ETKİSİZ ELEMAN ÖZELLİĞİ :

$0 \in \mathbb{R}$  ve her  $a \in \mathbb{R}$  için  $a+0=0+a=a$  ( $0$  toplamanın birim (etkisiz) elemanıdır.)

##### 5. TERS ELEMAN ÖZELLİĞİ :

$0 \in \mathbb{R}$  etkisiz eleman olmak üzere, her  $a \in \mathbb{R}$  için  $a+(-a)=(-a)+a=0$  olduğundan gerçekte sayılar kümesinde her elemanın toplama işlemine göre tersi vardır.

#### REEL SAYILAR KÜMESİ VE ÇARPMA İŞLEMİ

##### 1. KAPALILIK ÖZELLİĞİ:

Her  $a, b \in \mathbb{R}$  ,  $a \cdot b \in \mathbb{R}$

##### 2. DEĞİŞME ÖZELLİĞİ :

Her  $a, b \in \mathbb{R}$  ,  $a \cdot b = b \cdot a$

##### 3. BİRLEŞME ÖZELLİĞİ :

Her  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ,  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

##### 4. ETKİSİZ ELEMAN ÖZELLİĞİ :

$1 \in \mathbb{R}$  ve her  $a \in \mathbb{R}$  ,  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  ( $1$  çarpmanın birim (etkisiz) elemanıdır)

##### 5. YUTAN ELEMAN ÖZELLİĞİ :

$0 \in \mathbb{R}$  ve her  $a \in \mathbb{R}$  ,  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$  ( $0$  çarpmanın yutan elemanıdır)

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER - 1

### SAYI KÜMELERİ

#### 6.TERS ELEMAN ÖZELLİĞİ :

$1 \in \mathbb{R}$  , etkisiz eleman olmak üzere ve her  $a \neq 0 a \in \mathbb{R}$  ,  
 $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$  olduğundan gerçekte sayılar kümesinde her elemanın çarpma işlemine göre tersi vardır.

#### 7.ÇARPMANIN TOPLAMA ÜZERİNE DAĞILMA ÖZELLİĞİ :

Her  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ,  
 $a \cdot (b+c) = (b+c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$  olduğundan gerçekte sayılar kümesinde çarpma işlemi toplama üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

#### SAYI DOĞRUSU

Sayı doğrusu ve gerçekte sayılar kümesinin her elemanı, bire bir eşlenebilir. Bu eşlemede her reel sayıya yalnız bir nokta, her noktaya da bir ve yalnız bir reel sayı karşılık gelir.

Gerçekte sayılarla gösterilen herhangi bir sıralı ikili de koordinat sisteminde yine bir noktaya karşılık gelebilir.

#### Örnek...14 :

Aşağıdaki önermelerin doğru veya yanlışlığını belirtiniz?

Her sayma sayısı bir tamsayıdır.	D
Her tamsayı bir doğal sayıdır.	Y
Her irrasyonel sayı bir reel sayıdır.	
Her denklemin reel sayılarda en az bir çözümü vardır.	
Gerçekte sayılar ile rasyonel sayılar kümesi bire bir eşlenebilir.	
Devirli ondalıklı sayıların bazıları irrasyonel sayıdır.	
Her reel sayı devirli ondalıklı olarak yazılabilir.	

iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı vardır.

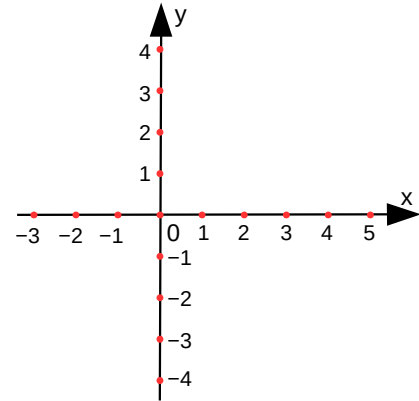
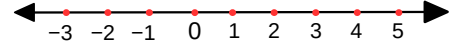
Reel sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerine göre tersi tamsayı olan eleman sadece 1 dir.

#### Örnek...15 :

Reel sayılar kümesinde çarpmanın yutan elemanı  $3x-7$  ise  $2x+1$  sayısının toplamaya göre tersi nedir?

#### Örnek...16 :

$A(3)$ ,  $B(0)$ ,  $C(-2)$  noktalarını sayı doğrusunda;  $K(1,-3)$  ve  $L(5,0)$  noktalarını ise koordinat sisteminde gösteriniz.

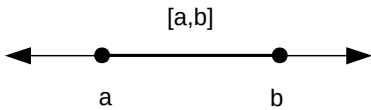


### ARALIK KAVRAMI

#### 1. KAPALI ARALIK

$\{x: a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$  kümesine  $a$  ve  $b$  sayılarıyla oluşturulan kapalı aralık denir ve  $[a,b]$  ile sembolik olarak gösterilir.

$[a,b]$  kapalı aralığı sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilebilir.



#### Örnek...1 :

$[-2,6]$  kümesini sayı doğrusunda gösteriniz.

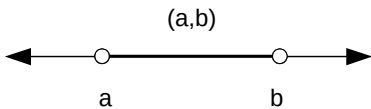
#### Örnek...2 :

$[-1,9] \cap [1,13]$  işleminin sonucunu sayı doğrusunda gösteriniz.

#### 2. AÇIK ARALIK

$\{x: a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$  kümesine  $a$  ve  $b$  sayılarıyla oluşturulan açık aralık denir ve  $(a,b)$  ile sembolik olarak gösterilir.

$(a,b)$  açık aralığı sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

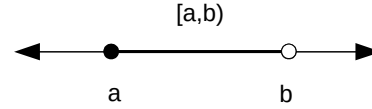


#### Örnek...3 :

$(-5,2)$  kümesini sayı doğrusunda gösteriniz.

#### 3. YARI AÇIK (KAPALI) ARALIK

$\{x: a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$  veya  $\{x: a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$  kümesine  $a$  ve  $b$  sayılarıyla oluşturulan yarı açık (kapalı) aralık denir. Sınır aralığa dahil ise köşeli, değilse normal parantezle belirtilir. Şekli inceleyiniz.



#### Örnek...4 :

$A = [-1,9)$  ve  $B = (1,13]$  kümelerini sayı doğrusunda çizerek aşağıdaki kümeleri bulunuz

- a)  $A \cup B$       b)  $A \cap B$       c)  $A \setminus B$

#### Örnek...5 :

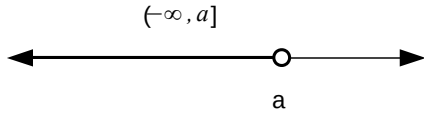
$A = (-3,9)$  ve  $B = [1,7)$  kümeleri veriliyor.  $(A \cup B) \cap \mathbb{Z}$  kümesinin eleman sayısı çift olan kaç alt kümesi vardır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 2

### ARALIK KAVRAMI

#### UYARI

Bir  $a$  reel sayısı ve bu reel sayı ile birlikte bu sayıdan daha büyük olan reel sayıların kümesi  $[a, \infty)$  ile gösterilir. Burada ' $\infty$ ' sembolü sonsuz (veya artı sonsuz) şeklinde okunur. Benzer şekilde  $(-\infty, a] = \{x: x < a, x \in \mathbb{R}\}$  biçiminde yazılıp şekildeki gibi gösterilebilir.



#### Örnek...6 :

$A = (-\infty, 4)$  ve  $B = [7, \infty)$  kümelerini sayı doğrusunda çizerek aşağıda istenen kümeleri bulunuz.

a)  $A \cup B$

b)  $A \cap B$

c)  $A \setminus B$

d)  $A' \cap B$

e)  $A'$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 2

### ARALIK KAVRAMI

#### DEĞERLENDİRME – 1

1) I.  $a < b$  olmak üzere a ve b arasındaki tüm tamsayılar (a,b) ile gösterilir.

II.  $x \in (a,b)$  ise  $a \leq x \leq b$  dir.

III.  $x \in [a,b)$  ise  $a \leq x < b$  dir.

IV. İki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı vardır.

İfadelerinden kaçını kesinlikle doğrudur?

2)  $A=[0,5]$  ve  $B=[-3,1)$  ise aşağıdaki kümeleri bulunuz?

a)  $A \cup B$

b)  $A \cap B$

c)  $A \setminus B$

d)  $A' \cap B$

3)  $17^{2-x} = 299$  ise x hangi aralıkta olmalıdır?

4)  $-5 < x \leq -2$  ve  $x \cdot y = 18$  için x artarak -2 olarak değişirken, y nasıl değişir?

## BİRİNCİ DERECEDEEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a, b \in \mathbb{R}$  ve  $a \neq 0$  olmak üzere,  
 $ax+b=0$  biçimindeki eşitliklere birinci  
dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.  
 $ax + b = 0$  denklemini sağlayan  $x = -\frac{b}{a}$   
sayısına denklemin kökü denir.

Denklemin köklerinden oluşan kümeye de  
çözüm kümesi denir ve  $\mathcal{Ç} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$   
şeklinde gösterilir.

### Örnek...1 :

$4(x - 1) + 5x + 10 = 5(x + 5)$   
denkleminin çözüm kümesini bulalım.

### Örnek...2 :

Bir sayının 3 eksiğinin 4 katı bu sayının 2  
katının 5 fazlasına eşitse bu sayı kaçtır?

### Örnek...3 :

$4(m - 3x) + 5x = x - 1$   
denkleminin kökü  $x=1$  ise  $m$  kaçtır?

### Örnek...4 :

$-0,3 \cdot \frac{6x}{5} - \frac{2,2x}{10} = 56$   
olduğuna göre,  $x$  kaçtır?

### Örnek...5 :

$(a+b-3)^{24} + (a+7)^{12} = 0$   
olduğuna göre,  $3a-2b$  kaçtır?

### Örnek...6 :

$3x+2y-8=0$  olduğuna göre,

a)  $x$  in  $y$  türünden çözümü nedir?

b)  $y$  in  $x$  türünden çözümü nedir?

### Örnek...7 :

$x=3+\frac{5}{y+2}$  olduğuna göre,

a)  $y$  nin hangi değeri için  $x$  hesaplanamaz?

b)  $x$  in hangi değeri için  $y$  hesaplanamaz?

### Örnek...8 :

$\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} = 4-x$   
ise  $x$  kaç olabilir?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 3

### BİRİNCİ DERECEDEKİ BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

#### Örnek...9 :

$2(x - 1) + 3x + 7 = 5x + 5$   
denkleminin çözüm kümesini bulalım.

#### Örnek...10 :

$5(x+3)-2(4-3x)+4 = 7(x-2)+4(x+6)+173$   
denkleminin çözüm kümesini bulalım.

#### GENELLEME

$ax+b=0$  denkleminde 3 hal kuralı vardır.

- 1)  $a \neq 0$  için tek çözüm vardır.
- 2)  $a=0$  ve  $b=0$  için sonsuz çözüm vardır.
- 3)  $a=0$  ve  $b \neq 0$  için çözüm yoktur.

#### UYARI

Çözümün hangi kümede arandığı unutulmamalıdır.

#### Örnek...11 :

$2(3-5x)+3x+10 = -7(x+2)+30$   
denkleminin çözüm kümesini **doğal sayılar** kümesinde bulunuz.

#### Örnek...12 :

$-2(5-x)+3(x+2)=1-3(x+2)$   
denkleminin çözüm kümesini **tamsayılar** kümesinde bulunuz.

#### Örnek...13 :

$(3a-12)x+2b-7=13$   
denklemin her  $x$  reel sayısı için sağlanıyorsa  $(a,b)$  ikilisini bulunuz.

#### Örnek...14 :

$6x+8=a(3x-2)-2b+5$   
denkleminin çözüm kümesi boş ise  $b$  kaç olamaz? (Bilinmeyen  $x$  kabul ediniz.)

#### Örnek...15 :

$m^2x-3=m+9x$   
denkleminin çözüm kümesinin boş olmasını sağlayan kaç  $m$  değeri vardır? (Bilinmeyen  $x$  kabul ediniz.)

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 3

### BİRİNCİ DERECEDEKİ BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

#### DEĞERLENDİRME – 1

- 1)  $2 \cdot (8-3x) = 4x-5+3 \cdot (2-4x)$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?
- 2)  $6 \cdot x - 5 \cdot (5 - x) - 21 = 2 \cdot (x - 1)$   
olduğuna göre, x kaçtır?
- 3)  $4 \cdot (m-3x) + 5 \cdot x = x - 1$   
denkleminin kökü 3 olduğuna göre, x kaçtır?
- 4)  $4 \cdot x + [2 - (x - 2) - 4 \cdot x + 12] = 0$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

- 5)  $14 - 3 \cdot x = -x + 10$  denkleminin kökü,  
 $(a-2) \cdot x + (x+4) \cdot (a-1) = 0$  denkleminin de kökü  
olduğuna göre, a kaçtır?

- 6)  $\frac{0,2x}{5} - \frac{0,3x+12}{4} = 7$   
olduğuna göre, x kaçtır?

- 7)  $\frac{x-2}{y+2} = \frac{-3}{2}$  olduğuna göre, x in y türünden  
çözümü nedir?

- 8)  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$  ve  $8a-3b=35$  olduğuna göre, a+b  
kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 3

### BİRİNCİ DERECE DENKLEMLER VE BİRİNCİ DERECE EŞİTSİZLİKLER

#### DEĞERLENDİRME – 2

- 1)  $5x - 7 - m = 2(x + 1) + n \cdot x$   
eşitliği her  $x$  gerçel sayısı için sağlandığına göre,  
( $m, n$ ) ikilisi nedir?
- 2)  $6x - 8 = a(2x - 11) + b$   
eşitliğini sağlayan hiçbir  $x$  gerçel sayısı  
olmadığına göre,  $b$  kaç olamaz kaçtır?
- 3)  $(a - 2)x - 4x - 20 = 0$   
denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğuna  
göre,  $a$  kaçtır?
- 4)  $k^3 \cdot x - 343x - a \cdot k + 3a - 2 = 0$   
denkleminin  $x$  e göre çözüm kümesi sonsuz elemanlı  
bir denkleme  $a$  kaç olmalıdır?

- 5)  $a^2x - 4x - a + 2 = 0$   
denkleminin  $x$  e göre çözüm kümesi, boş küme  
olduğuna göre,  $a$  kaç olmalıdır?

- 6)  $y = \frac{x - 2}{x + 4}$  olduğuna göre,  $x$  in  $y$  türünden  
değerini bulunuz.

- 7)  $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{x^2}) = \frac{15}{28}$   
ise  $x$  kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER - 4

### BİRİNCİ DERECE DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

### REEL SAYILARDA EŞİTSİZLİK ÖZELLİKLERİ

1)  $a, b, c \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  
 $a < b$  ise  $a + c < b + c$  ,  $a - c < b - c$

2)  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ve  $c > 0$  olmak üzere,  
 $a < b$  ise  $a \cdot c < b \cdot c$  ,  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

3)  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ve  $c < 0$  olmak üzere,  
 $a < b$  ise  $a \cdot c > b \cdot c$  ,  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

4)  $a$  ve  $b$  aynı işaretli olmak üzere,  
 $a < b$  ise  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

5)  $0 < a < b$  ise  $m \in \mathbb{Z}^+$  koşuluyla  $a^m < b^m$

6)  $0 < a < b$  ise  $m \in \mathbb{Z}^-$  koşuluyla  $a^m > b^m$

7)  $a < b$  ve  $c < d$  ise  $a + c < b + d$   
(eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir  
AMA ÇIKARILAMAZ)

8)  $0 < a < 1$  koşuluyla  $n > m$  ise  $a^n < a^m$

#### Örnek...1 :

$0 < x < 1$  ve  $y > 0$  koşuluyla kaç tanesi kesin doğrudur?

- i)  $x \cdot y > 0$    ii)  $x \cdot y > 1$    iii)  $x \cdot y < 0$    iv)  $0 < x \cdot y < y$

#### Örnek...2 :

$\frac{a}{b} < 0$  ise hangileri kesinlikle yanlıştır ?

- i)  $a \cdot b > 0$    ii)  $a \cdot b < 0$    iii)  $a + b > 0$   
iv)  $a - b < 0$    v)  $0 < a < b$    vi)  $a^2 - b^2 > 0$

#### Örnek...3 :

$x^2 < x$  ise hangileri kesinlikle yanlıştır?

- i)  $x > 0$    ii)  $x < 0$    iii)  $x + x^3 > 0$

#### Örnek...4 :

$\frac{a}{b} > 0$     $a \cdot b \cdot c > 0$     $c^2 \cdot b < 0$   
ise  $a, b$  ve  $c$  nin işaretlerini bulunuz?

#### Örnek...5 :

$x > y$  ve  $x \cdot z < y \cdot z$  ise hangileri kesin doğrudur?

- i)  $x > 0 > y$    ii)  $z < 0$    iii)  $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$    iv)  $\frac{z}{x} < \frac{z}{y}$   
v)  $x^2 > y^2$    vi)  $x^2 z < y^2 z$    vii)  $x + z < y + z$

#### Örnek...6 :

$x > y$  ve  $x \cdot z < y \cdot z$  ise hangileri kesin doğrudur?

- i)  $x > 0 > y$    ii)  $z < 0$    iii)  $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$   
iv)  $\frac{z}{x} < \frac{z}{y}$    v)  $x^2 z < y^2 z$

#### Örnek...7 :

$\frac{1}{10} < \frac{1}{a} \leq \frac{2}{3}$  eşitsizliği sağlanıyorsa  $a$  nın kaç farklı tamsayı değeri vardır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 4

### BİRİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİKLER

#### 1. DERECEDEN EŞİTSİZLİKLER

$ax+b>0$ ,  $ax+b<0$ ,  $ax+b\leq 0$  veya  $ax+b\geq 0$  eşitsizlikleri çözülürken aynı deklemlerde olduğu gibi  $x$  i yalnız bırakırız. Burada dikkat edilmesi gereken, eşitsizlik kurallarına uyulmasıdır. (Yön değiştirmeler , kuvvet alınması veya taraf tarafa işlemler gibi)

#### Örnek...8 :

$3x-2>6(2-3x)$   
eşitsizliğin çözüm kümesini sayı doğrusunda gösteriniz?

#### Örnek...9 :

$\frac{2x-3}{5}<3-\frac{2x}{4}$   
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...10 :

$8<2x+4<24$   
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...11 :

$3x-2<5x-7<3x+3$   
eşitsizliğin çözüm kümesini sayı doğrusunda gösteriniz?

#### Örnek...12 :

$3x-2<13\leq 4x+21$   
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...13 :

$2x+2$  TL ye alınan bir mal  $y$  TL ye satılıyor.  $y=5x-160$  ise bu satıştan zarar edilmemesi için satış fiyatı en az kaç olmalıdır?

#### Örnek...14 :

$4-\frac{x}{2}<3-\frac{x-a}{4}$   
eşitsizliğin çözüm kümesi  $(-3a, \infty)$  ise  $a$  kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 4

### BİRİNCİ DERECE DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

#### Örnek...15 :

$\frac{2x-y}{x+y}=5$  ve  $4 < 2x+3y < 16$  ise  $4x+3y$  nin en büyük tamsayı değeri kaçtır?

#### Örnek...16 :

$-5 < x \leq -2$  ve  $x \cdot y = 26$  ise  $x$  artarak  $-2$  olurken  $y$  nasıl değişir?

#### Örnek...17 :

$a, b$  birer tamsayı olmak üzere  $-6 < a < 7$  ve  $-8 < b < 3$  ise  $2a-3b$  sayısının en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?

#### Örnek...18 :

$m, n$  birer doğal sayı olmak üzere,  $-14 < m < 5$  ve  $-9 < n < 21$  ise  $2m-n$  sayısının en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?

#### HATIRLATMA

$a < b$  ve  $c < d$  ise  $a+c < b+d$   
(eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir AMA ÇIKARILAMAZ)

#### Örnek...19 :

$-2 < x < 3$  ve  $-4 \leq y < -1$  veriliyor.  
Aşağıdaki ifadelerin **en büyük** ve **en küçük** tamsayı değerlerini bulunuz?

a)  $x+y$

b)  $4x+3y$

c)  $5x-3y$

d)  $x^2$

e)  $y^2$

f)  $x^3$

g)  $x \cdot y$

h)  $x^2 + 4x$

ı)  $y^2 - 2y$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 4

### BİRİNCİ DERECE DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

---

#### Örnek...20 :

$-3 < x < 6$  ve  $-7 < y < 4$  ise  $x.y$  değerinin en büyük tamsayı değeri ile en küçük tamsayı değerleri arasındaki fark kaçtır?

#### Örnek...21 :

$-3 < x < 4$  ve  $-2 < y < 5$  ise  $x^3 - 3.y^2$  değerinin en büyük tamsayı değeri ile en küçük tamsayı değerleri arasındaki fark kaçtır?

#### Örnek...22 :

$a^2 < a$  ise  $a$  sayısı hangi aralıktadır?

#### Örnek...23 :

$a < a^3 < a^2$  ise  $a$  sayısı hangi aralıktadır?

#### Örnek...24 :

$19^{x-2} < 400$  eşitsizliğinin çözüm kümesini tamsayılar kümesinde bulunuz

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 4

### BİRİNCİ DERECE DEN EŞİTSİZLİKLER

#### DEĞERLENDİRME – 1

- 1)  $-4 < m < 2$  ise  $m^2$  ifadesinin en geniş aralığı nedir?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- 2)  $-7 \leq x < 5$  ve  $-2 \leq y < 1$  ise  $5x-3y$  tamsayısının en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- 3)  $a$  ve  $b$  birer tamsayıdır.  
 $-6 < a < 7$  ve  $-8 < b < 3$  ise  $(2a-3b)$  tamsayısının en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- 4)  $2 \cdot (2x-3) - 3 \cdot (1-x) > 19$  ile beraber  $3x-5 < 13$  eşitsizliğini sağlayan kaç farklı  $x$  tamsayı değeri vardır?

- 5)  $a^2 < 25$  ve  $a-3b=2$  ise  $b$  nin kaç farklı tamsayı değeri vardır?

- 6)  $\frac{2x}{4-\sqrt{17}} < 4+\sqrt{17}$  eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

- 7) I. Bir eşitsizlikte her iki tarafa aynı sayı eklenirse eşitsizlik bozulmaz.  
II. Bir eşitsizlikte her iki taraf aynı sayıya bölünürse eşitsizlik yönü bozulmaz.  
III. Aynı yönlü eşitsizlikler toplanamaz.  
IV. Aynı yönlü eşitsizlikler çıkarılamaz.  
V. Bir sayının pozitif sırayla artan kuvvetleri alınırsa sayı giderek büyür.  
ifadelerinden kaç tanesi kesinlikle doğrudur?

**MUTLAK DEĞER****TANIM**

Bir  $x$  reel sayısına karşılık gelen noktanın sayı doğrusunda 0 (sıfır) a olan uzaklığına  $x$  sayısının mutlak değeri denir ve  $|x|$  şeklinde yazılır. Başka bir deyişle

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ dir.}$$

**UYARI**

Uzaklık kavramı taşıyan mutlak değer in eşiti **ASLA NEGATİF OLAMAZ.**

**Örnek...1 :**

$$|3| - |-9| + |-7| - |-6| = ?$$

**Örnek...2 :**

$$|\sqrt{5}-1| - |1-\sqrt{5}| = ?$$

**UYARI**

$|x|$  in **EN KÜÇÜK** değeri **SIFIR**dır.

**Örnek...3 :**

$|2x-3|$  ifadesinin en küçük değeri için  $4x+3y=21$  ise  $x.y$  çarpımı kaçtır?

**Örnek...4 :**

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$|2a-5| + |4+3b| + (2-c)^2 + \sqrt{d+1} = 0$$

ise  $a.b+c-d$  ifadesi kaç eşittir?

**Örnek...5 :**

$x < 0 < y < z$  ise  $|x-y| + |x-z| - |z-y| - |3-y| + |8-3x| = ?$

**Örnek...6 :**

$x, y$  ve  $z$  pozitif gerçel sayılar olmak üzere  $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > \frac{1}{z}$  olduğuna göre,  $|x-y| - |x-z| - |z-y|$  ifadesinin eşiti nedir?

**Örnek...7 :**

$x = 1 - \sqrt{5}$ ,  $y = \sqrt{5} - 2$ , ise  $|x+y| - |y-x| - |x| = ?$

**Örnek...8 :**

$x \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$  ise  $|1-5x| - 4|x| + |3x-1| = ?$

**Örnek...9 :**

$x < |x|$ ,  $y^2 < y$ ,  $a < a^3 < a^2$  ise  $|x+a| + |1-y-x| + x-y+a = ?$

**MUTLAK DEĞERİN ÖZELLİKLERİ**

$$1) |x| \geq 0$$

$$2) |x| = |-x|, |x-y| = |y-x|$$

**Örnek...10 :**

$$|x-3| = -x+3 \quad |y+1| = y+1$$

ise  $x$  in en büyük tamsayı değeri  $y$  nin en küçük tamsayı değerinden kaç fazladır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 5

### MUTLAK DEĞER

#### Örnek...11 :

$|x-3|+|x-5|$  ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

#### Örnek...12 :

$|2x-8|+|x-3|$  ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

#### Örnek...13 :

$\frac{120}{|3x-20|+|x-2|}$  ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

3)  $\sqrt{x^2}=|x|$

#### Örnek...14 :

$x < 0 < y$  olmak üzere,  
 $\sqrt{9x^2} + \sqrt{4y^2} - \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$  ifadesinin eşiti nedir?

#### Örnek...15 :

$\sqrt{a^2 - 4a + 4} + |b - 7| = 0$  ise a.b çarpımı kaçtır?

#### Örnek...16 :

$\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 12y - y^2 - 36$  ise  $x + y$  kaçtır?

4)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$   $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

5)  $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

#### Örnek...17 :

$x \neq 0$  olmak üzere,  $\frac{|-8x| - |2x| - |-3x|}{|-3x|}$  kesrinin değeri kaçtır?

### MUTLAK DEĞERLİ DENKLEMLER

6)  $|x| = a \Rightarrow x = a$  veya  $x = -a$

7)  $|x| = |y| \Rightarrow x = y$  veya  $x = -y$

#### Örnek...18 :

$|3x - 2| = 16$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...19 :

$7 \cdot |9 - 2x| + 14 = 0$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...20 :

$||3x - 1| - 6| = 13$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...21 :

$|x - 1| - |-3x + 7| = 0$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 5

### MUTLAK DEĞER

#### Örnek...22 :

$|x-5|+|2x-10|=21$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...23 :

$|x^2-4|-|6-3x|=0$   
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

### MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER

8)  $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$

#### Örnek...24 :

$|4x-2|<10$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...25 :

$|2x-3|\leq 12$   
eşitsizliğinin tamsayılardaki çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...26 :

$|x-5k|<4$   
eşitsizliğinin çözüm kümesi  $(-n,24)$  ise  $k-n$  kaçtır?

#### Örnek...27 :

$\|2x-3|-5|\leq 14$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

9)  $|x|>a \Rightarrow x>a$  veya  $x<-a$

#### Örnek...28 :

$|x-2|>10$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...29 :

$|5x-3|\geq 3$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 5

### MUTLAK DEĞER

#### Örnek...30 :

$|x-4|+|2x-8|-|20-5x|\geq 32$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$10) b < |x| < a \Rightarrow b < x < a \text{ veya } -a < x < -b$$

#### Örnek...31 :

$3 < |4x-1| < 12$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...32 :

$1 < |6-x| \leq 13$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...33 :

$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{8}$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...34 :

$\frac{|x+1|-5}{|x-2|} < 0$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...35 :

$9 < (2x+1)^2 \leq 36$   
ise x hangi aralıktadır?

#### Örnek...36 :

$|2x-5| < 13$  ve  $3x+2y-8=0$  olduğuna göre y sayısının hangi reel sayı aralığında olduğunu bulunuz?

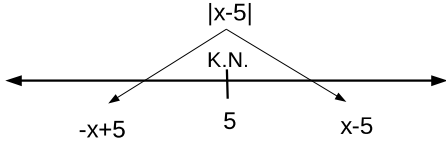
## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER - 5

### MUTLAK DEĞER

#### KRİTİK NOKTA

11)  $|x-k|$  ifadesinde mutlak değer kökü olan  $k$  sayısına kritik değer denir.

Örnekte  $|x-5|$  ifadesi kritik değerine göre parçalanmıştır. İnceleyiniz.



#### Örnek...37 :

Aşağıda verilen mutlak değerli ifadeleri kritik noktalarına göre parçalayınız.

1.  $|3x-12|$

2.  $|6+x|$

3.  $|3x-4|$

4.  $|2x-1|+|x+1|$

#### UYARI

Standart denklem ve eşitsizlik tipine uymayan denklemler veya eşitsizliklerin çözümünde kritik noktayı sıklıkla kullanırız.

#### Örnek...38 :

$$|x-6|+x+3=9$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...39 :

$$|x-5|+|x-2|=3$$

denkleminin çözüm kümesini tam sayılar kümesinde bulunuz?

#### Örnek...40 :

$$|x|+|2x+4|=19$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...41 :

$$|x+|x||=0$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 5

### MUTLAK DEĞER

---

#### Örnek...42 :

$$|3x-2|+2x<28$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### UYARI

Mutlak değerli ifadelerin grafiklerinin çizimde de kritik noktadan yararlanınız.

#### Örnek...43 :

$$y=|x-3|$$

ifadesinin grafiğini çiziniz.

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 5

### MUTLAK DEĞER

#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $|18-8:2+3|+|-9.-2-14| =?$
- 2)  $x=|1-\sqrt{5}|$ ,  $y=|\sqrt{7}-2|$ ,  $z=|\sqrt{7}-\sqrt{5}|$  ise  $|x-y|-|z-y|+1 =?$
- 3)  $x^2 < x$  ise  $|x-1|+3|x-2|+2|x-3| =?$
- 4)  $x, y$  ve  $z$  çeşitkenar üçgenin herhangi üç kenarı olmak üzere,  $|x-y-z|+|x-y-z|-2(x-y+z)$  ifadesinin eşiti nedir?
- 5)  $|x-3|=3-x$ ,  $|1+y|=y+1$  ise  $x$  in en büyük tamsayı değeri,  $y$  nin en küçük tamsayı değerinden kaç fazladır?
- 6)  $a$  sabit bir sayı olmak üzere,  $|5x-3|=2x-a$  denkleminin kökler toplamı 0 ise  $a$  kaçtır?
- 7)  $|3x-1| < 11$  eşitsizliğini sağlayan tamsayıların toplamı kaçtır?
- 8)  $17 < |7-6x|$  eşitsizliğini sağlayan tamsayıların toplamı kaçtır?
- 9)  $2 \leq |2x+7| < 17$  eşitsizliğini sağlayan tamsayıların toplamı kaçtır?
- 10)  $|x-2| < |x+2|$  eşitsizliğinin çözüm kümesi hangisidir?
- 11)  $k$  sabit bir sayı olmak üzere  $|x-5k| < 4$  eşitsizliğinin çözüm kümesi  $(-n, 24)$  ise  $k-n$  kaçtır?
- 12)  $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{9}$  ise  $x$  in tamsayı değerleri toplamı kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 5

### MUTLAK DEĞER

13)  $|x^2 - 2x| = |x - 2|$  ise  $x$  in değerleri toplamı kaçtır?

14)  $\sqrt{m^2 - 9} + |n^3 - 8| + (p - 3)^{42} + |6 + x| = 0$  ise  $m.n.p.x$  ifadesinin en küçük değerini aldığı anda  $m+n+p+x$  kaçtır?

15) 
$$\frac{1800}{|x+1| + |3x-12| + |2x-4|}$$
 ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

16)  $|a+2| < 6$  ve  $a-3b=7$  ise  $b$  nin alacağı kaç tamsayı değeri vardır?

17)  $|x-3| + |x+1| = 10$  denkleminin çözüm kümesi nedir?

18)  $|x-3| + x + 2 < 7$  eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

19)  $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 6b - b^2 + 9$  ise  $a.b$  kaçtır?

20)  $|a-45| - |a-35|$  ifadesi kaç farklı tamsayı değeri alır?

21)  $|b| - b = 0, a^2 < a, a+c < 0$  ise  $\frac{\sqrt{a^2 b^2 c^2} + a \cdot \sqrt{b^2 c^2} + c \cdot \sqrt{a^2 b^2}}{?}$

22)  $x^2 - 4x + 4 < 49$  eşitsizliğinin çözüm kümesinde kaç asal sayı vardır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

## 1. DERECEDEKİ İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $x$  ve  $y$  değişken olmak üzere,  $ax+by+c=0$  biçimindeki denklemlere birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir.  $ax+by+c=0$  denkleminin çözüm kümesi sonsuz tane sıralı ikiliden oluşur. Çözüm kümesi analitik düzlemde bir doğru belirtir.

### İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMİ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$   
 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$   
sistemine iki bilinmeyenli denklem sistemi denir.  
Bu tür denklem sistemlerinin çözüm kümesi (eğer varsa) bulunurken iki farklı çözüm yapılabilir.

### 1. YOK ETME YÖNTEMİ

Bilinmeyenlerden herhangi birinin katsayıları eşitlenir, taraf tarafa çıkartılır.

#### Örnek...1 :

$x-y=9$   
 $2x+y=23$   
sistemini sağlayan  $x$  değeri kaçtır?

#### Örnek...2 :

$(a+b-13)^{32}+(a-b-9)^{44}=0$   
ise  $(a,b)$  ikilisini bulunuz.

#### Örnek...3 :

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ \frac{2x-3}{y}=2 \end{cases}$$

sistemini sağlayan  $y$  değeri kaçtır?

#### Örnek...4 :

$a$  ve  $b$  doğal sayılar olmak üzere,  
 $(3a+2).(a+b)=20$  ise  $a+b$  en çok kaçtır?

#### Örnek...5 :

$mx - (n+2)y = 5$   
 $x + (m+n)y = 7$   
sistemini sağlayan  $(x,y)$  ikilisi  $(2,-3)$  ise  $m.n$  değeri kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

#### 2.YERİNE KOYMA YÖNTEMİ

Denklemlerden herhangi birinde, değişkenlerden biri yalnız bırakılır ve bulunan bu değer, diğer denklemde yerine yazılır

#### Örnek...6 :

$x + y = 11$   
 $2x + 5y = 34$   
sistemini sağlayan x değeri kaçtır?

#### Örnek...7 :

$x - y = 5$   
 $|2x + y| = 13$   
sistemini sağlayan y değerleri çarpımı kaçtır?

#### Örnek...8 :

$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2$   
 $\frac{3}{y} + \frac{2}{x} = 5$   
ise x kaçtır?

#### Örnek...9 :

$$\frac{a+b}{ab} = 3$$
$$\frac{3a-2b}{ab} = 4$$

ise a kaçtır?

#### HATIRLATMA

$ax + by + c = 0$  denkleminin çözüm kümesi sonsuz tane sıralı ikiliden oluşur. Çözüm kümesi analitik düzlemde bir doğru belirtir. Bu doğru çizilirken iki nokta bulmak yeterlidir. Bulunan noktaların birleştirilmesiyle doğru çizilmiş olur.

#### Örnek...10 :

Denklemleri verilen doğruların grafiklerini çiziniz.

a)  $3x - 4y - 12 = 0$

b)  $x + 5y = 3$

c)  $y = 3x$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

#### Örnek...11 :

Doğruları verilen koşulla beraber çözümlenir.

a)  $x+y=8$  ve  $x>2$

b)  $3x-5y=6$  ve  $y<-2$

c)  $x \geq 5$  ve  $y-x+3=0$

#### GENELLEME

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

iki bilinmeyenli denklem sisteminde her bir ifade bir doğru belirttiğinden , doğruların durumuna göre çözüm incelenebilir:

- 1)  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  ise doğrular kesişir dolayısıyla tek çözüm vardır.
- 2)  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  ise doğrular çakışır dolayısıyla sonsuz çözüm vardır.
- 3)  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$  ise doğrular paraleldir dolayısıyla çözüm yoktur.

#### Örnek...12 :

$$\begin{aligned} (3m-2)x+4y &= 12 \\ 5x+(n-5)y &= 16 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise  $m+n$  toplamı kaçtır?

#### Örnek...13 :

$$\begin{aligned} x-my &= 12 \\ 3x+5y &= 21 \end{aligned}$$

sistemin çözümü boş küme ise  $m$  değeri ne olabilir?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

#### Örnek...14 :

$$(a+7)x-ay=12$$
$$2x+3y=25$$

denkleminin çözüm kümesi tek elemanlı ise  $a$  seçimi nasıl olmalıdır?

#### UYARI

$ax + by = 0$  denklemi her  $x$  ve  $y$  değeri için sağlanıyorsa,  $a=0$  ve  $b = 0$  olmalıdır.

#### Örnek...15 :

$(2x-y+5)a + (x+y)b = 0$   
eşitliği her  $a, b$  için doğru ise  $y$  kaçtır?

#### Örnek...16 :

$(m-3)x+(n+1)y=0$  denklemi her  $x$  ve  $y$  reel sayısı için sağlanıyorsa  $(m,n)$  ikilisi ne olmalıdır?

#### Örnek...17 :

$m$  ve  $n$  tam sayılar olmak üzere

$$\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m-10} = 1$$

eşitliğini sağlayan  $m$  ve  $n$  değerlerini bulunuz.

#### Örnek...18 :

$$a+b=2$$

$$a+c=7$$

$$b+c=9 \text{ ise } a.b.c \text{ kaçtır?}$$

#### Örnek...19 :

$$a+2b=3$$

$$a+4c=4$$

$$b-c=5$$

olduğuna göre,  $a$  kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

#### Örnek...20 :

a, b, c negatif reel sayılar ve  
a.b=12  
a.c=3  
b.c=4  
olduğuna göre, a.b.c kaçtır?

#### EŞİTSİZLİK GRAFİKLERİ

$ax + by + c < 0$  ifadesi koordinat düzleminde gösterilirken:

**ADIM 1**  $ax + by + c = 0$  alınarak grafiğe ait noktalar bulunur

**ADIM 2**  $<, >$  için kesikli,  $\leq, \geq$  için sürekli şekilde grafik çizilir

**ADIM 3** Grafiğe ait olmayan bir nokta denenerek bölge bulunur

**ADIM 4** Bulunan bölge taranır.

#### Örnek...21 :

$3x - 2y - 12 < 0$  eşitsizliğini düzlemde çiziniz

#### Örnek...22 :

$x - 5y + 8 \geq 0$  eşitsizliğini düzlemde çiziniz.

#### Örnek...23 :

$x + 3y > 0$  eşitsizliğini düzlemde çiziniz

#### Örnek...24 :

$x - 2y + 4 \geq 0$  ,  $x - 2y - 4 < 0$  eşitsizlik sistemini düzlemde çiziniz

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

#### Örnek...25 :

$5x-4y+20 \geq 0$  ,  $2x+3y+8 < 0$  eşitsizlik sisteminin düzlemde çiziniz

#### Örnek...26 :

$x-4y+8 > 0$  ,  $3x+2y-4 < 0$  ve  $y > 0$  eşitsizlik sisteminin düzlemde sınırladığı bölgenin alanını bulunuz

#### Örnek...27 :

$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} < 1$  ,  $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} < 1$  ve  $x > 0$  eşitsizlik sisteminin düzlemde sınırladığı bölgenin alanını bulunuz

#### Örnek...28 :

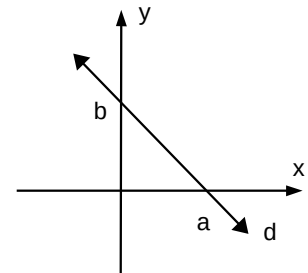
$|\frac{x}{4}|=3$  ,  $|y-\frac{2}{3}|=5$  eşitsizlik sisteminin düzlemde sınırladığı bölgenin alanını bulunuz

#### Örnek...29 :

$|x-3\frac{y}{4}| < 1$  , eşitsizlik sisteminin düzlemde sınırladığı bölgeyi çizerek gösteriniz.

#### HATIRLATMA

Şekilde x eksenini  $A(a,0)$  ve y eksenini  $B(0,b)$  noktasında kesen doğrunun denklemini  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  olarak yazılabilir.



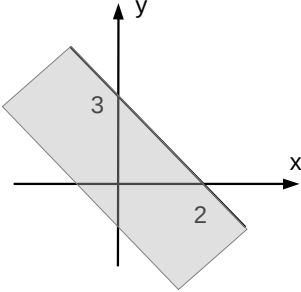
## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

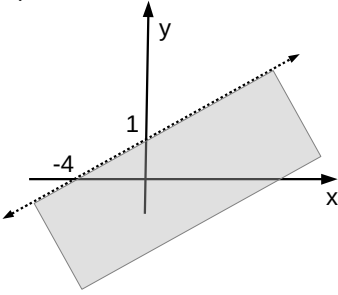
#### Örnek...30 :

Takip eden örneklerde taralı bölgeyi eşitsizlik sistemleriyle ifade ediniz.

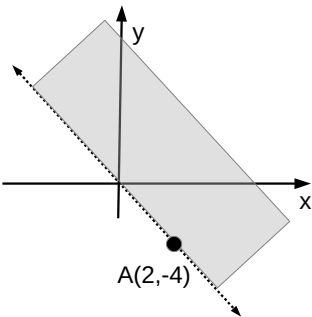
a)



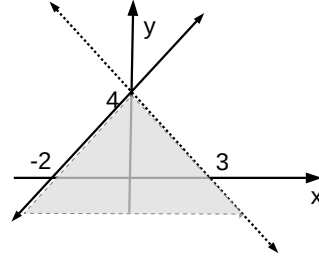
b)



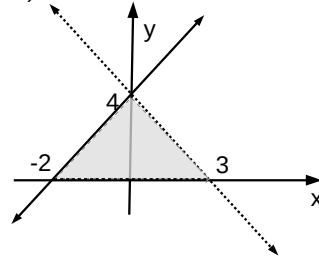
c)



d)



e)



## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 6

### DENKLEM SİSTEMLERİ VE EŞİTSİZLİKLER

#### DEĞERLENDİRME - 1

- 1)  $2x - y = 8$   
 $x + y = 13$   
olduğuna göre,  $x - y$  kaçtır?
- 2)  $x + 2y = 4$   
 $3x + y = 17$   
denklem sistemini sağlayan  $(x, y)$  ikilisi nedir?
- 3)  $2x + 3y - 28 = 0$   
 $3x + 2y - 27 = 0$   
olduğuna göre,  $x - y$  farkı kaçtır?
- 4)  $2x - my = 6,$   
 $nx + 3y = 3$   
denklem sisteminin çözümü  $(1,2)$  ikilisi ise  $(m,n)$  ikilisi nedir?
- 5)  $ax + y + 2 = 0$   
 $2x + 3y + b = 0$   
denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre,  $a + b$  toplamı kaçtır?
- 6)  $(3m-2)x+4y=12$   
 $5x + (n-5)y = 16$   
denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre,  $m + n$  toplamı kaçtır?
- 7)  $2x-ay = 12$   
 $(a + 7)x + 3y = 32$   
denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre,  $a$  kaç olabilir?
- 8)  $(3a + 1).x + 3y - 8 = 0$   
 $5x + y + 12 = 0$   
denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olabilmesi için,  $a$  kaç olmalıdır?
- 9)  $(m-3)x+(1+n)y=0$  denklemin her  $(x,y)$  için sağlanıyorsa  $(m,n)$  ikilisi nedir?
- 10)  $xy-3y=2$  ise  $x$  in hangi değeri için  $y$  bulunamaz?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER - 7

### ÜSLÜ İFADELER

### ÜSLÜ İFADELER

a bir reel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere, n tane a 'nın çarpımına a'nın n. kuvveti denir ve  $a^n$  olarak ifade edilir.  $a^n = b$  üslü ifadesinde a ya **taban**, n ye **üs**, b ye ise üslü ifadenin değeri denir.

Örneğin;  $2^5=2.2.2.2.2=32$  dir.

#### Örnek...1 :

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + 2 + 2 + 2$  işleminin sonucu kaçtır?

### ÜSLÜ İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ

1)  $a \neq 0$  için  $a^0=1$  dir.  
Her a reel sayısı için  $a^1=a$  dır.  
 $x \neq 0$  için  $0^x=0$  dır.  
 $0^0$  ifadesi **tanımsızdır.**

### UYARI

$(-5)^2=25$  iken  $-5^2=-25$  tir.  
 $a < 0$  için  $a^{\text{ÇİFT}} > 0$  olur. {  $(-5)^2=25$  gibi }  
 $a < 0$  için  $a^{\text{TEK}} < 0$  olur. {  $(-5)^3=-125$  gibi }

#### Örnek...2 :

$(-2)^3+4^2-(-3)^2+1^{1234}-0^{567}=?$

### NEGATİF KUVVET (ÜS)

2)  $(a)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$  veya  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$  dir.

Örneğin;  $(5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

#### Örnek...3 :

$(-5)^2-7^2-36.(-3)^{-2}+12^0-(-4)^3 = ?$

#### Örnek...4 :

$$\frac{1^{100}+1^{101}+\dots+1^{125}}{(-1^{-67})+(-1^{-66})+\dots+(-1^{-42})}=?$$

### ÇARPMA BÖLME İŞLEMİ

3)  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4)  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5)  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

6)  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

#### Örnek...5 :

$x=-2$  ve  $y=3$  olmak üzere  $x^y-y^x-x:y = ?$

#### Örnek...6 :

m ve k tamsayılar ve k'nın en büyük değeri için ,  $(-x)^3 \cdot (-x)^{-8} \cdot (x^2)^3 = m \cdot x^k$  ise  $m+k$  kaçtır?

#### Örnek...7 :

$$\frac{\overbrace{3.3.3 \dots 3}^{8 \text{ tane}}}{\underbrace{3+3+3+\dots+3}_{2187 \text{ tane}}} \text{ ifadesinin eşiti nedir?}$$

#### Örnek...8 :

$\frac{0,0006^3}{0,00002^4}$  sayısı kaç basamaklıdır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 7

### ÜSLÜ İFADELER

#### Örnek...9 :

$128^8$  sayısının yarısı kaçtır?

#### Örnek...10 :

$$\frac{0,09^{-2,5}}{0,81^{-4}} = ?$$

### TOPLAMA ÇIKARMA İŞLEMİ

$$7) k \cdot a^n + m \cdot a^n - n \cdot a^n = a^n(k+m-n)$$

#### Örnek...11 :

$6 \cdot 2^{x-3} + 3 \cdot 2^{x-2} - 2^x = 512$  ise  $x$  kaçtır?

### KUVVETİN KUVVETİ

$$8) (a^n)^m = a^{n \cdot m} \text{ dir.}$$

$$\text{⚠️} : (a^n)^m \neq a^{(n^m)} \neq a^{n^m} \text{ (genellikle)}$$

#### Örnek...12 :

$(3^2)^3 + 3^{(2^3)}$  toplamının eşiti kaçtır?

#### Örnek...13 :

$$(2^{-2})^{-3} + 7^0 + 1^{-1000} = ?$$

#### Örnek...14 :

$32^{34} \cdot 25^{87}$  sayısı kaç basamaklıdır?

#### Örnek...15 :

$4 \cdot x^{12 \cdot y} + 5 \cdot (x^3)^4 \cdot y - 7(x^2)^6 \cdot y = m \cdot x^n \cdot y$  olduğuna göre,  $m \cdot n$  çarpımı kaçtır?

#### Örnek...16 :

$5^x = p$  ise  $5^{2x+3}$  sayısının  $p$  türünden eşiti nedir?

#### Örnek...17 :

$3^{x-2} = a$  ise  $\left(\frac{1}{81}\right)^{3-x}$  sayısının  $a$  türünden eşiti nedir?

#### Örnek...18 :

$3^x = k$ ,  $5^x = n$  ise  $2025^x$  in  $k$  ve  $n$  cinsinden değeri nedir?

### ÜSLÜ İFADE EŞİTLİĞİ

$$9) a^n = a^m \text{ ise } n = m \text{ dir.}$$

#### Örnek...19 :

$2^{4x-3} = 128^{x-2}$  ise  $x$  kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 7

### ÜSLÜ İFADELER

#### Örnek...20 :

$49^{4-2x}=343^{x-2}$  ise x kaçtır?

#### Örnek...21 :

$7^a=5^b$  ise  $(343)^{\frac{a}{b}}$  nin değeri kaçtır?

#### Örnek...22 :

$4a=b$  ve  $a^b=27^4$  ise a-b kaçtır?

### ÜSLÜ İFADE EŞİTLİĞİ

10)  $a^n=b^n$  ise n tekse  $a=b$ ,  
n çiftse  $|a|=|b|$

#### Örnek...23 :

$(4x-1)^3=(3x+2)^3$  ise x kaç olabilir?

#### Örnek...24 :

$(2x+1)^2=(x-2)^2$  ise x kaç olabilir?

### ÜSLÜ İFADE EŞİTSİZLİĞİ

11)  $a>1$  ve  $a^x>a^y$  ise  $x>y$  olur.

#### Örnek...25 :

$8^{2-5x} < 32^{2x-3}$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

### ÜSLÜ İFADE EŞİTSİZLİĞİ

12)  $0<a<1$  ve  $a^x>a^y$  ise  $x<y$  olur.

#### Örnek...26 :

$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5}$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 7

### ÜSLÜ İFADELER

#### Örnek...27 :

$\left(\frac{3}{4}\right)^{5x+1} < \left(\frac{64}{27}\right)^{x-1}$  eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

13)  $a^x=1$  ise 3 durum mümkün olabilir.

- $a=1$  ve  $x$  her reel değeri alabilir.
- $a=-1$  ise  $x$  çift tam sayı
- $x=0$  ise  $a \neq 0$  yeterlidir.

#### Örnek...28 :

$(x-2)^{x^2-4}=1$  ise  $x$  kaç olabilir?

14)  $\left. \begin{array}{l} a^n=b^m \\ a^p=b^r \end{array} \right\}$  ise  $\frac{n}{p}=\frac{m}{r}$  dir.

#### Örnek...29 :

$5^a=49$  ve  $5^b=343$  ise  $a$  nın  $b$  türünden değeri nedir?

#### Örnek...30 :

$2^a=12$  ve  $3^b=72$  ise  $a$  nın  $b$  türünden değeri nedir?

#### Örnek...31 :

$\frac{1}{1+7^x} + \frac{1}{1+7^{-x}} = 1525^{3+y}$  ise  $y$  kaçtır?

15) Üstlü sayılarda sıralama sorularında üsler veya tabanlar eşitlendikten sonra karşılaştırma yapılarak sıralanırlar.

#### Örnek...32 :

Aşağıdaki sayıları sıralayınız?

i)  $a=2^{45}$  ,  $b=4^{30}$  ,  $c=8^{11}$

ii)  $x=7^{60}$  ,  $y=11^{48}$  ,  $z=2^{96}$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 7

### ÜSLÜ İFADELER

#### Örnek...33 :

$x^y=16$  olmak üzere, bileşenleri tam sayı olan kaç  $(x,y)$  ikilisi vardır?

#### Örnek...34 :

$a=3+6^x$  ve  $b=4-6^{-x}$  ise  $a$  nın  $b$  türünden değeri nedir?

#### Örnek...35 :

$$6^x - 6^{-x} = 8$$

olduğuna göre,  $36^{-x} + 36^x$  toplamı kaçtır?

#### Örnek...36 :

$$A = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

olduğuna göre,  $15^2 + 20^2 + 25^2$  ifadesinin  $A$  türünden eşiti nedir?

#### Örnek...37 :

$x$  ve  $y$  tamsayıları için,  
 $7^{3x+4y-4} = 9^{y+2+x}$   
olduğuna göre,  $x.y$  çarpımı kaçtır?

16)  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $a^x = b$  eşitliğinde  $b$  nin değerini  $a$  nın iki kuvveti arasına sıkıştırırsak  $x$  in aralığı bulunmuş olur.

#### Örnek...38 :

$y$  tamsayısı için,  $3^{x+2} = 111$  ve  $y < x < y + 1$  olduğuna göre,  $y$  nin değeri kaçtır?

#### Örnek...39 :

$$27 = 5^x, 1 = 11^y, 224 = 15^z$$

ise  $x, y$  ve  $z$  yi sıralayınız.

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 7

### ÜSLÜ İFADELER

#### DEĞERLENDİRME

1)  $4^{x-4}=512^{1-y}$  ise x in y türünden değeri nedir?

2)  $(2^2)^3+2^{(2^2)}$  toplamının eşiti kaçtır?

3)  $(x-2)^4=(x)^2$  ise x kaç olabilir?

4)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x+1} < \left(\frac{64}{27}\right)^{x-1}$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

5)  $8^x=25$  ,  $125^y=32$  ise x.y çarpımı kaçtır?

6)  $p=3^{48}$  ,  $q=9^{23}$  ,  $r=27^{17}$   
sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız?

7)  $a^b=64$  olmak üzere, bileşenleri tam sayı olan kaç (a,b) ikilisi vardır?

8) x ve y tamsayıları için,  
 $5^{x+3y-6}=6^{2x+y+2}$   
olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

### KÖKLÜ İFADELER

### KÖKLÜ SAYILAR

$n$  birden büyük bir doğal sayı ve  $a$  bir reel sayı olmak üzere  $a^n = b$  ifadesinde  $a$  ya  $b$  nin  $n$ . kuvvetten kökü denir. Yani

$a^n = b \Rightarrow a = \sqrt[n]{b}$  veya özel olarak

$a^2 = b \Rightarrow a = \sqrt{b}$   $a, b$  nin kareköküne eşittir.  
(2.kuvvetten kökü)

$a^3 = b \Rightarrow a = \sqrt[3]{b}$   $a, b$  nin küp köküne eşittir.  
(3.kuvvetten kökü)

$a^4 = b \Rightarrow a = \sqrt[4]{b}$   $a$  ya,  $b$  nin 4.kuvvetten kökü denir.

#### UYARI:

Her köklü ifade reel sayı belirtmez; kök derecesi çiftken kök içi negatif olursa ifade reel sayı değildir. Yani

$$\sqrt[4]{-3} \notin \mathbb{R} \quad \text{ama} \quad \sqrt[13]{-3} \in \mathbb{R}$$

#### Örnek...1 :

$\sqrt[4]{x-3}$  ifadesinin reel sayı belirtmesi için  $x$  kaç olmalıdır?

#### Örnek...2 :

$\sqrt[12]{8-x} + \sqrt[4]{x-2} - \sqrt[17]{x-5}$  ifadesinin reel sayı belirtmesi için  $x$  kaç olmalıdır?

#### Örnek...3 :

$\sqrt[102]{12-|8-2x|}$  ifadesinin reel sayı belirtmesi için  $x$  hangi aralıkta olmalıdır?

### KÖKLÜ İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ ÖZELLİK 1

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, n \in \mathbb{Z}^+ \quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, n \in \mathbb{Z}^+$$

#### Örnek...4 :

$$\sqrt[5]{(-2)^5} + \sqrt[4]{(-2)^4} - \sqrt[3]{(-27)} = ?$$

#### Örnek...5 :

$$\sqrt{25} + \sqrt{49} + \sqrt{121} - \sqrt{(-8)^2} = ?$$

#### Örnek...6 :

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = ?$$

#### Örnek...7 :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)} = ?$$

#### Örnek...8 :

$$\sqrt[4]{(\sqrt{2}-5)^4} - \sqrt[6]{(5-\sqrt{2})^6} = ?$$

#### Örnek...9 :

$x > y > 0 > z$  ise

$$\sqrt[40]{(z-x)^{40}} - \sqrt[5]{(z-y)^5} + 2z - y$$

ifadesinin eşitini bulunuz?

#### Örnek...10 :

$$\sqrt{967.969+1} = ?$$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

### KÖKLÜ İFADELER

#### ÖZELLİK 2

$m$ , 1 den büyük bir tamsayı ve  $a \geq 0$  ise

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

#### Örnek...11 :

Rasyonel kuvvet olarak yazınız.

$$\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{8}$$

$$\sqrt[7]{6}$$

#### Örnek...12 :

$\sqrt[4]{2^5} \cdot 8^4 \cdot 16^3 = 64$  eşitliğine göre,  $x$  kaçtır?

#### Örnek...13 :

$\sqrt[3]{(2)^{x+2}} = \sqrt[5]{(4)^{7-2x}}$  ise  $x$  kaçtır?

#### ÖZELLİK 3

$a > 0$  ve  $k > 0$  olmak üzere,  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[k]{a^{\frac{m}{n}}}$

Yani kök dereceleri uygun koşullarda sadeleştirilebilir ve ya genişletilebilir

#### Örnek...14 :

$x = \sqrt{5}, y = \sqrt[3]{120}$  sayılarını sıralayınız

#### ÖZELLİK 4

$$x \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot x^n}$$

#### Örnek...15 :

$a = 3\sqrt{5}, b = 5\sqrt{2}$  sayılarını sıralayınız.

#### ÖZELLİK 5 (TOPLAMA VE ÇIKARMA)

$$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} - z \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y - z) \sqrt[n]{a}$$

#### Örnek...16 :

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{128} - 2\sqrt{32} = ?$$

#### Örnek...17 :

$$\sqrt{28} - 3\sqrt{63} - 6\sqrt{112} = ?$$

#### Örnek...18 :

$$3\sqrt{80} - 6\sqrt{20} + 2\sqrt{45} = ?$$

#### ÖZELLİK 6 (ÇARPMA)

$$(m \cdot \sqrt[n]{a}) \cdot (p \cdot \sqrt[n]{b}) \cdot \sqrt[n]{c} = m \cdot p \cdot \sqrt[n]{abc}$$

#### Örnek...19 :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = ?$$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

### KÖKLÜ İFADELER

#### Örnek...20 :

$$3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = ?$$

#### Örnek...21 :

$$(\sqrt{6}-1) \cdot (\sqrt{6}+1) = ?$$

#### Örnek...22 :

$$(\sqrt{6}-2)^2 = ?$$

### ÖZELLİK 7 (BÖLME)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

#### Örnek...23 :

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = ?$$

#### Örnek...24 :

$$\frac{\sqrt{0,63}}{\sqrt{0,07}} = ?$$

#### Örnek...25 :

$$\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{2}} = ?$$

#### Örnek...26 :

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{2}} = ?$$

#### Örnek...27 :

$$\frac{(\sqrt{4,4} + \sqrt{9,9})}{\sqrt{0,1}} = ?$$

#### Örnek...28 :

$$\frac{(\sqrt{1,47} + \sqrt{0,75})}{\sqrt{75}} = ?$$

#### Örnek...29 :

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} = ?$$

#### Örnek...30 :

$$a = \sqrt{3}-1, b = \sqrt{3}+1 \text{ ise } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = ?$$

### ÖZELLİK 8 (İÇ İÇE KÖK DURUMU)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

$$\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a \cdot x^n}$$

#### Örnek...31 :

$$\sqrt[5]{1024} = ?$$

#### Örnek...32 :

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt{x} \text{ ise } x+y \text{ ( } x, y \in \mathbb{Z} \text{ )} = ?$$

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

### KÖKLÜ İFADELER

#### Örnek...33 :

$$\sqrt[3]{4\sqrt[5]{32}}=?$$

#### Örnek...34 :

$$\sqrt[3]{4\sqrt{x}}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2} \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

#### Örnek...35 :

$$0 < x < 2 \text{ olduğuna göre } \sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-4x+4}$$

ifadesinin eşiti nedir?

#### ÖZELLİK 9

$$\begin{array}{c} \sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} \sqrt{x \pm \sqrt{y}} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x+y \quad x \cdot y \end{array} \quad (x > y)$$

#### Örnek...36 :

$$\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=?$$

#### Örnek...37 :

$$\sqrt{12+4\sqrt{5}}=?$$

#### Örnek...38 :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=?$$

#### Örnek...39 :

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}=?$$

#### Örnek...40 :

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=?$$

#### ÖZELLİK 10 (PAYDANIN RASYONEL YAPILMASI)

$$\text{i) } \frac{K}{\sqrt{a}} = \frac{K}{\sqrt{a}} = \frac{K(\sqrt{a})}{a}$$

#### Örnek...41 :

$$\frac{8}{\sqrt{2}}=?$$

#### Örnek...42 :

$$\frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{21}{5\sqrt{3}}$$

$$\text{ii) } \frac{K}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{K}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{K(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

#### Örnek...43 :

$$\frac{24}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}=?$$

#### Örnek...44 :

$$\frac{24}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}-1}=?$$

#### Örnek...45 :

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=?$$

#### Örnek...46 :

$a=\sqrt{71}-\sqrt{70}$ ,  $b=\sqrt{67}-\sqrt{66}$   
sayılarını sıralayınız.

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

### KÖKLÜ İFADELER

#### DEĞERLENDİRME

1)  $\sqrt[12]{14-2x} + \sqrt[4]{x-7} - 3x + 5$  reel sayısının değeri kaçtır?

2)  $x < 0 < y < z$  veriliyor.  
 $\sqrt[3]{(x-y-z)^3} + \sqrt[4]{(x-y-z)^4} + \sqrt{(x-y)^2}$  ifadesinin eşitini bulunuz?

3)  $\sqrt{169} - \sqrt[8]{(-2)^8} + \sqrt[3]{-64} = ?$

4)  $\sqrt[3]{(2)^{x+2}} = \sqrt[5]{(4)^{7-2x}}$  ise x kaçtır?

5)  $\sqrt{28} - 3\sqrt{63} - 6\sqrt{112} = ?$

6)  $(\sqrt{6}-2)^2 + \frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{2}} = ?$

7)  $\sqrt[4]{17+4\sqrt{18}} = ?$

8)  $\frac{20}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}-1} = ?$

9)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gibi n tane sayının aritmetik ortalaması  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  geometrik ortalaması  $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$  olarak tanımlanmıştır.

a) Buna göre 1,2 ve 4 sayılarının aritmetik ortalaması geometrik ortalamasının kaç katıdır?

b) x ve y negatif olmayan iki sayı olsun. x ve y nin aritmetik ortalaması A.O. ve geometrik ortalaması G.O ise  $G.O \leq A.O$  olduğunu ispatlayınız

**ORAN ORANTI**

a sayısının 0 dan farklı olan b sayısına oranı  $a:b$  veya  $\frac{a}{b}$  olarak gösterilir. İki veya daha fazla oranın eşitlenmesiyle oluşan ifadeye orantı denir.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ifadesine ikili orantı denir. Bir orantı orantı sabitine eşitlenerek  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$  biçiminde de yazılabilir.

**Örnek...1 :**

$$a=3b \text{ ise } \frac{a+4b}{a-2b} = ?$$

**Örnek...2 :**

$$\frac{a+4b}{a+2b} = \frac{5}{3} \text{ ise } \frac{2a-b}{a+b} = ?$$

**UYARI**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

ifadesi  $a:c:e=b:d:f$  olarak da yazılabilir.

**Örnek...3 :**

$$a:5:c=8:b:12 \text{ ise } ab+bc \text{ kaçtır?}$$

**ORANTININ ÖZELLİKLERİ**

- 1)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$   
(içler dışlar çarpımı eşittir)
- 2)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- 3)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{1}{k}$
- 4)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = k^n$

**Örnek...4 :**

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \text{ ve } 3a-4b-2c=-68 \text{ ise } c \text{ kaçtır?}$$

**Örnek...5 :**

$$\frac{a-1}{2} = \frac{2b+1}{3} = \frac{3c}{4} \text{ ve } a+b-2c=3 \text{ ise } a \text{ kaçtır?}$$

**Örnek...6 :**

Bir karışımda bulunan a, b ve c maddeleri arasında  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{2}{5}$  ilişkisi olduğu biliniyor. Karışımın toplam ağırlığı 1250 gram ise karışımda kaç gram a maddesi vardır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 9

### ORANTI VE ORTALAMALAR

#### NOT

- 1)  $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$  ifadesinde x' e a ile b nin orta orantılısı denir.
- 2)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$  ifadesinde x sayısına a, b ve c nin dördüncü orantılısı denir.

#### Örnek...7 :

2, 3 ve 12 ile dördüncü orantılı olan sayı a ;  
3 ve 12 ile orta orantılı olan negatif reel sayı  
b ise a-b kaçtır?

5)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{m.a+n.c}{m.b+n.d} = k$   
(m ve n sayılarının her ikisi de sıfır  
olmamak koşuluyla)  
örneğin  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = k$   $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{1+3}{2+6} = \frac{1}{2}$

#### Örnek...8 :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{8} \text{ ise } \frac{b+d}{a+c} = ?$$

#### Örnek...9 :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{6a+k.b}{28} \text{ ise } k \text{ kaçtır?}$$

#### Örnek...10 :

$$x + \frac{7}{a} = 11, a + \frac{7}{x} = 9 \text{ ise } \frac{a}{x} = ?$$

#### Örnek...11 :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = 3 \text{ ise } \frac{d}{a} = ?$$

#### Örnek...12 :

$$\frac{x+y}{y} = \frac{y+z}{z} = \frac{z+k}{k} = 1,3 \text{ ise } \frac{x}{k} = ?$$

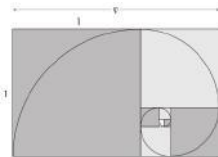
**Altın Oran:** Uç noktaları A ve B olan bir doğru parçasını üzerindeki P noktasından eşit olamayan iki parçaya bölelim. Eğer parçalardan küçük olanının boyunun büyük olanına oranı ,büyük olanının, tüm çubuğun boyuna oranı eşitse çubuk P noktası tarafından altın oranda bölünmüştür ve eşit olan bu oranlara altın oran denir.

Altın oran  $\phi$  sembolü ile temsil edilir ve  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339..$  irrasyonel sayıdır.

Altın oran terimleri 1,1,2,3,5,8,13,... şeklinde ilerleyen Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki oran olarak da karşımıza çıkar.

Altın dikdörtgen:

Kenarlarının oranı  $\frac{1}{\phi}$  olan dikdörtgendir.



Altın oran doğada da pek çok defa karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, omuzdan parmak ucuna olan mesafe ile dirsekten parmak olan mesafenin oranı, arı kovanındaki dişi arı ile erkek arı sayıları arasındaki oran yaklaşık olarak altın orandır.

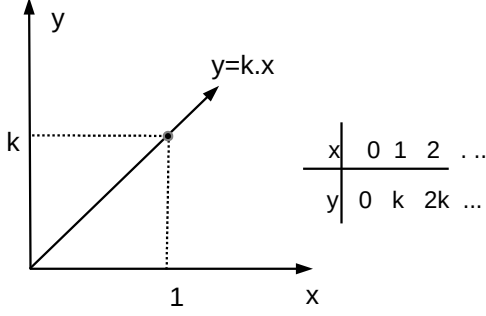
## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 9

### ORANTI VE ORTALAMALAR

#### ORANTI MODELLERİ

##### 1. DOĞRU ORANTI

İki çokluk belirten ifade aynı katlarla artıp aynı katlarla azalıyorsa böyle çoklular ters orantılıdır denir. Kısaca  $y$ ,  $x$  ile doğru orantılı ise bu ilişkiyi  $y=k.x$  ( $k>0$ ) ile modelleriz.



##### Örnek...13 :

$a$  sayısı  $b$  ile doğru orantılı ve  $a=8$  için  $b=20$  ise  $b=25$  için  $a$  kaçtır?

##### Örnek...14 :

$(a-2)$  sayısı  $(b+1)$  ile doğru orantılı ve  $a=48$  için  $b=5$  ise  $b=59$  için  $a$  kaçtır?

##### Örnek...15 :

$a, b, c$  sayıları sırasıyla 2, 4 ve 5 ile doğru orantılı ve  $4a-3b+2c=60$  ise  $b$  kaçtır?

##### Örnek...16 :

Bir aracın duruş mesafesi, frene basıldığı andaki hızının karesi ile orantılıdır. Bu araç saatte 40 km hızla giderken duruş mesafesi 5 metre olduğuna göre, saatte 80 km hızla giderken duruş mesafesi kaç metre olur?

##### Örnek...17 :

Bir sınıftaki kız öğrencilerin sayısı 1,8 erkek öğrencilerin sayısı ise 1,5 ile doğru orantılıdır. Sınıf mevcudu en az kaçtır?

##### Örnek...18 :

Eş güçteki 20 işçi 300 m<sup>2</sup> duvar örebiliyor. Buna göre aynı güçteki 30 işçi aynı sürede kaç m<sup>2</sup> duvar örer?

##### Örnek...19 :

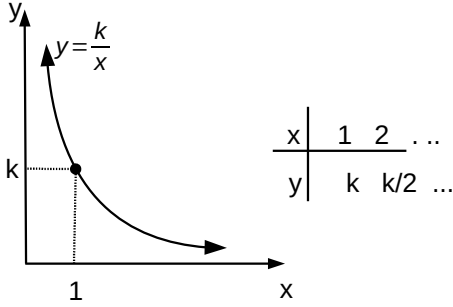
Bir usta 6 günde 7 sandalye ,bir çırak 9 günde 5 sandalye yapabilmektedir. Beraber 217 sandalyeyi kaç günde yaparlar?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 9

### ORANTI VE ORTALAMALAR

#### 2. TERS ORANTI

iki çokluktan biri büyürken diğeri aynı oranda küçülüyorsa bu çokluklar ters orantılıdır denir. Kısaca y, x ile ters orantılı ise bu ilişkiyi  $y = \frac{k}{x}$  ( $k > 0$ ) ile modelleriz.



#### Örnek...20 :

a sayısı ile b ters orantılı ve  $a=8$  için  $b=20$  ise  $b=24$  için a kaçtır?

#### Örnek...21 :

$(x+4)$  sayısı  $(y-2)$  ile ters orantılıdır.  $x=1$  için  $y=10$  ise  $y=3$  için x kaçtır?

#### Örnek...22 :

a, b, c sayıları sırasıyla 2, 4 ve 5 ile ters orantılı ve  $4a-3b+2c-4=260$  ise c kaçtır?

#### Örnek...23 :

Eş güçteki 20 işçi bir işi 30 günde bitirebiliyor. Buna göre aynı güçteki 25 işçi kaç günde işi bitirir

#### Örnek...24 :

30 kişilik bir topluluğa 20 gün yetecek kadar yemek vardır. 5 gün sonra kaç kişi bu topluluktan ayrılmalıdır ki kalan yemek kalan kişilere 30 gün yetsin?

#### 3. BİLEŞİK ORANTI

içinde üç veya daha fazla oran bulunduran orantılara bileşik orantı denir. Kısaca y, x ile doğru, z ile ters orantılı ise bu ilişkiyi  $y = \frac{k \cdot x}{z}$  ( $k > 0$ ) ile modelleriz.

#### Örnek...25 :

a sayısı ile b sayısı doğru, c ters orantılıdır.  $a=12$  için  $b=16$  ve  $c=20$  ise  $c=12$  ve  $b=10$  için a kaçtır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 9

### ORANTI VE ORTALAMALAR

#### Örnek...26 :

$(x+3)$  sayısı ile  $(y+2)$  sayısı doğru,  $(z-4)$  ile ters orantılıdır.  $x=17$  için  $z=9$  ve  $y=8$  ise  $z=12$  ve  $y=10$  için  $x$  kaçtır?

#### Örnek...27 :

225 TL 3 ve 4 ile doğru 2 ile ters orantılı parçalanırsa en büyük parça kaç TL olur?

#### Örnek...28 :

Eşit kapasiteli 9 işçi 15 m<sup>2</sup> halıyı 6 saatte dokuyabiliyorsa aynı kapasitedeki kaç işçi 30 m<sup>2</sup> halıyı 12 saatte dokur?

#### Örnek...29 :

Eşit kapasiteli 8 işçi 32 parça işi günde 16 saat çalışarak 18 günde yapabiliyorsa 12 işçi 8 parça işi günde 4 saat çalışarak kaç günde bitirir?

#### Örnek...30 :

Bir yarışta sabit hızlarla yarışan 3 kişiden A yarışı bitirdiğinde B nin 50 metre C nin ise 60 metre yolu vardır. B yarışı bitirdiğinde ise C nin yarışı bitirmesine 12 metre yolu kaldığına göre pist kaç metredir?

#### Örnek...31 :

Birbirine bağlı üç çarktan birincisi 12 kere döndüğünde ikinci 9 üçüncüsü ise 15 dönüş yapmaktadır. Bu çarklardaki toplam diş sayısı 2820 ise en küçük çarkın diş sayısı nedir?

#### Örnek...32 :

Bir işi Hakan 12 günde, Onur 24 günde bitiriyor. Buna göre beraber 3 günde bu işin ne kadarını bitirebilirler?

#### Örnek...33 :

Bir işi birinci işçi 48 günde, ikinci işçi 16 ve üçüncü işçi ise işin  $\frac{1}{4}$  ini 6 günde bitiriyor. Buna göre beraber bu işin yarısını kaç günde bitirirler?

#### Örnek...34 :

Bir havuzu birinci musluk 45 dakikada ikinci musluk ise 30 dakikada dolduruyor. Musluklar beraber açıldıktan kaç saat sonra havuz dolar?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 9

### ORANTI VE ORTALAMALAR

#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$  ise  $\frac{a-b}{a+b} = ?$
- 2) Bir okulda gözlüklü öğrencilerin gözlüksüz öğrencilere oranı  $\frac{3}{8}$  dir. Gözlüklü öğrenci sayısının 150 den fazla olduğu biliniyorsa okul mevcudu en az kaçtır?
- 3) a, b, c pozitif sayılar  $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$  ve  $a^2+b^2+c^2=8000$  ise b kaçtır?
- 4)  $\frac{3}{a.b} = \frac{4}{b.c} = \frac{5}{a.c}$  ve  $b+c-2a=24$  ise c kaçtır?
- 5) 560 TL yaşları 5,ve 9 olan kardeşlere yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaştırılırsa fark ne kadar olur?
- 6) 328 TL yaşları 2,3 ve 7 olan üç çocuğa yaşlarıyla ters orantılı bölüştürülürse en çok alan kaç TL alır?
- 7)  $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  olduğuna göre  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  kaçtır?
- 8)  $\frac{p \cdot a \cdot b}{a+b} = \frac{q \cdot b \cdot c}{c+b} = \frac{r \cdot a \cdot c}{a+c} = \frac{5}{6}$  ve  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 8$  olduğuna göre  $p+q+r$  kaçtır?
- 9) Bir işi 60 günde yapan Kerem'in hızını dört kat arttır, iş ise üç katına çıkarsa işin bitiş süresi kaç gün olur?
- 10) Bir usta 5 saatte  $7 \text{ m}^2$  , çırağı ise 7 saatte  $5 \text{ m}^2$  duvar boyuyabiliyor. Beraber  $222 \text{ m}^2$  duvar boyadıklarında çirak kaç  $\text{m}^2$  duvar boyamıştır?

### DENKLEM KURMA PROBLEMLERİ

Bir problemi çözerken, soruda yer alan verileri, matematik diline dönüştürmek gerekir. Buradaki işleme denklem kurma denir. Denklem kurarken, birbirinden farklı her bilinmeyen için, farklı semboller kullanılır. Bilinmeyen sayısı ne kadar az olursa, çözüm daha kolay olacağından, mümkün olduğunca az değişken seçilir.

### BİR PROBLEMI ÇÖZME AŞAMALARI (ALGORİTMA):

- 1) Bilinmeyenler  $x, y, z,$  gibi değişkenler ile ifade edilir.
- 2) Problemin ifadesine uygun bir matematiksel ifade yazılır.
- 3) Oluşturulan denklem çözülür ve sonuç elde edilir.

Bir sayı :

Bir sayının 3 katı :

Bir sayının yarısının 1 fazlası :

Bir sayının 3 katının 1 fazlasının yarısı :

Bir sayının karesinin yarısının 4 eksiği :

Bir sayının %20'si :

Bir sayının %20 si ile %10 unun aritmetik ortası :

İki sayının toplamının yarısı :

İki sayıdan birincinin üç katı ile ikincinin çarpmaya göre tersinin farkı :

### SAYI KESİR PROBLEMLERİ

#### Örnek...1 :

Hangi sayının dörtte birinin 4 eksiğinin 2 katı 56 dır?

#### Örnek...2 :

Toplamı 88 olan üç sayıdan, birincisi ikinciden 4 fazla, üçüncüsü ise ilk iki sayının toplamına eşittir. Bu sayıların en küçük olanı kaçtır?

#### Örnek...3 :

Bir kişi 3 er 3 er çıktığı merdivenleri, 5 er 5 er inerken 12 adım daha az atmıştır. Merdivendeki basamak sayısı kaçtır?

#### Örnek...4 :

Bir sınıfta öğrenciler sıralara 4erli oturursa 3 sıra boş kalıyor. 3 erli otururlarsa 5 öğrenci ayakta kalıyor. Sınıf mevcudu, sıra sayısından kaç fazladır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### Örnek...5 :

4 yanlışın bir doğruyu götürdüğü 120 sorunun sorulduğu bir sınavda tüm soruları yanıtlayan ve 90 neti olan bir öğrenci kaç soru yanlış cevaplamıştır ?

#### Örnek...6 :

Hacmi 360 litre olan bir depo 8 lt ve 10 lt iki kova ile toplam 39 seferde boşaltılmıştır. 8 lt lik kova kaç sefer kullanılmıştır?

#### Örnek...7 :

Bir bilet kuyruğunda Melis baştan 13. Ela sondan 24. ve aralarında 6 kişi varsa kuyruk en az ve en çok kaç kişi olabilir?

#### Örnek...8 :

$\frac{1}{4}$  ü ile  $\frac{1}{6}$  sı arasındaki farkı 15 olan sayının 10 eksiğinin  $\frac{1}{10}$  u kaçtır?

#### Örnek...9 :

Pozitif pay ve paydası olan bir kesrin değeri  $\frac{3}{4}$  'tür. Bu kesrin payına 1 eklenir ve paydasından 7 çıkarılırsa değeri 1 oluyorsa pay ve paydanın toplamı en az kaçtır?

#### Örnek...10 :

Bir bardakta bir miktar su vardır ve bu halde bardağın ağırlığı x kg dır. Bardaktaki suyun yarısı boşaltılırsa bardağın ağırlığı y kg oluyor. Boş bardağın ağırlığı kaç x ve y cinsinden nedir?

#### Örnek...11 :

Bir tel bir ucundan  $\frac{1}{5}$  i kadar kesildikten sonra kalan kısmının da diğer uçtan  $\frac{1}{4}$  ü kadar kesiliyor. Kalan telin orta noktası ilk telin boyunun kaçta kaçta kadar kaymıştır?

#### Örnek...12 :

Bir kişi borcunun önce  $\frac{2}{7}$  sini sonra kalanın  $\frac{3}{5}$  ini ödüyor. Son olarak da 240 TL daha ödeyince geriye 160 TL daha borcu kalıyorsa borcun ilk ödediği kısmı ne kadardır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### YAŞ PROBLEMLERİ

1) Kişiler arasındaki yaş farkı değişmez.

2)  $a$  yaşındaki bir kişinin;  
 $t$  yıl önceki yaşı  $a-t$ ,  
 $t$  yıl sonraki yaşı  $a+t$  dir.

3) Yaşları toplamı  $A$  olan  $n$  kişinin;  
 $t$  yıl önceki yaşları toplamı  $A-n.t$   
 $t$  yıl sonraki yaşları toplamı  $A+n.t$  dir.

#### Örnek...1 :

Bugünkü yaşları toplamı 21 olan dört kişinin 6 yıl sonra yaşları toplamı kaç olur?

#### Örnek...2 :

Yaşları oranı  $\frac{3}{4}$  olan iki kişinin yaşları toplamı 50 den büyükse yaşları farkı en az kaçtır?

#### Örnek...3 :

1978 yılında doğan Haluk'a yaşı sorulduğunda yaşım doğduğum yılın rakamları toplamı demişse konuşma hangi yılda yapılmıştır?

#### Örnek...4 :

Mehmet Sibel'den 7 yaş büyüktür. 4 sene önce Sibel'in yaşının 3 katı Mehmet'in yaşının iki katıydı. Buna göre yaşları toplamı bugün kaçtır?

#### Örnek...5 :

Ahmet Mehmet'ten 7 yaş büyük Faruk'dan ise 2 yaş küçüktür. 5 yıl sonra bu üç kişinin yaşları toplamı Ahmet'in şimdiki yaşının 2 katından 20 fazla olacaktır. Buna göre Faruk şimdi kaç yaşındadır ?

#### Örnek...6 :

Bir babanın yaşı çocuğunun yaşının 7 katıdır. Çocuk babanın yaşına geldiğinde ikisinin yaşları toplamı 80 olursa baba çocuğu doğduğunda kaç yaşındadır?

#### Örnek...7 :

Bir babanın yaşı üç çocuğunun yaşları toplamının üç katına eşittir. 3 yıl sonra babanın yaşı çocukların yaşları toplamının 2 katından 4 fazla olursa baba ve çocukların bugünkü yaşları toplamı kaçtır?

#### Örnek...8 :

Merve ile Erdem'in yaşları toplamı 45 dir. Erdem Merve'nin yaşına geldiğinde yaşları toplamı 59 olursa Merve kaç yaşındadır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### HIZ PROBLEMLERİ

$$\text{Yol} = \text{hız} \cdot \text{zaman} \quad (x = v \cdot t)$$

#### Uyarı

Birimler birbirlerine uyacak cinsten olmalıdır.

#### Örnek...1 :

Hızı saate 90 km olan bir araç 45 saniyede kaç metre yol alır?

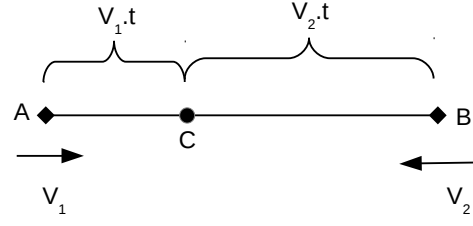
#### Örnek...2 :

90 km/s hızla gittiği yolu dönüşte 60 km/s hızla giderken 5 saat fazla sürede alan bir aracın aldığı toplam yol kaç km dir?

#### Örnek...3 :

Hızı saatte 80 km olan bir araç bir yolu 9 saatte gitmeyi planlıyor. Yolun yarısına geldiğinde lastiğin patlaması sebebiyle yarım saat duran bu aracın yolu yine aynı sürede tamamlaması için harekete tekrar başladıktan sonraki hızı kaç km/s olmalıdır?

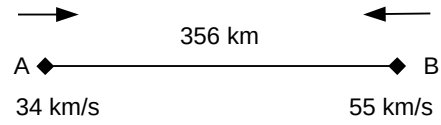
Birbirine doğru aynı anda harekete geçen araçlar:



Karşılaşma C de olsun.

$$t_{\text{karşılaşma}} = \frac{\text{toplam yol}}{\text{hızlar toplamı}} = \frac{|AB|}{V_1 + V_2}$$

#### Örnek...4 :



şekildeki hızlarla birbirine doğru harekete geçen araçlar B kentinden kaç km uzakta karşılaşır?

#### Örnek...5 :

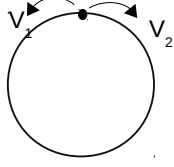
Aralarında 480 km olan ve birbirlerine doğru (zıt yönde) hareket eden iki araçtan birinin hızı diğerinin hızının 3 katıdır. Karşılaşana kadar hızlı olan araç diğerinden kaç km daha fazla yol alır?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### UYARI

Birbirine doğru aynı anda harekete geçen araçların durumuyla çember üzerinde birbirine doğru zıt yönlü hareket etme durumu benzer bir mantıkla düşünülebilir.

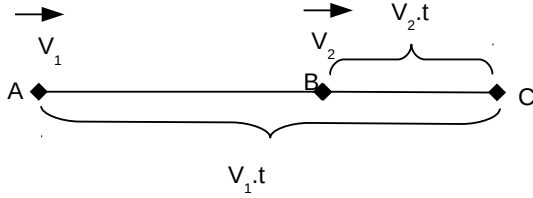


$$t_{\text{kar}} = \frac{\text{Çember çevresi}}{\text{hızlar toplamı}} = \frac{|Ç|}{V_1 + V_2}$$

#### Örnek...6 :

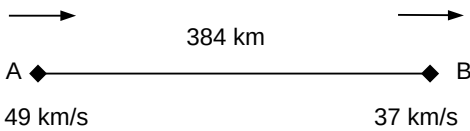
Çevresi 480 m olan bir pistte aynı noktadan zıt yönde 18 m/dk ile 6 m/dk hızla hareket eden iki hareketli kaç dk sonra karşılaşır?

Aynı yöne doğru anda harekete geçen araçlar: ( $V_1 > V_2$ )



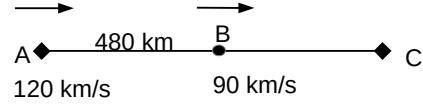
$$t_{\text{yakalama}} = \frac{\text{toplam yol}}{\text{hızlar farkı}} = \frac{|AB|}{V_1 - V_2}$$

#### Örnek...7 :



Şekildeki hızlarla aynı doğru harekete geçen araçlardan geriden gelen diğerini kaç saat sonra yakalar?

#### Örnek...8 :



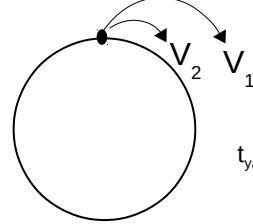
$|AB| = 480$  km dir. Aynı anda harekete geçen şekildeki iki hareketliden hızlı olan yavaş olanı C kentinde yakalıyor. Buna göre  $|AC|$  yolu kaç km dir?

#### Örnek...9 :

Birbirine 560 km mesafede bulunan araçlar aynı anda birbirlerine doğru hareket ederlerse 14 saat sonra karşılaşıyorlar. Hızları oranı kaçtır?

#### UYARI

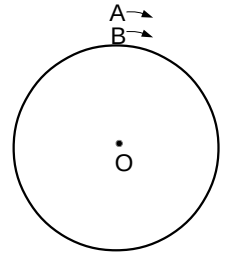
Aynı yöne doğru anda harekete geçen araçların durumuyla çember üzerinde birbiriyle aynı yönlü hareket etme durumu benzer bir mantıkla düşünülebilir.



$$t_{\text{yak}} = \frac{\text{çevre}}{\text{hızlar farkı}} = \frac{|Ç|}{V_1 - V_2}$$

#### Örnek...10 :

Şekilde A hareketlisinin hızı dakikada 18 metre, B hareketlisinin hızı dakikada 12 metredir. A aracı B aracına her 20 dakikada bir tur bindiriyorsa çemberin çevresi kaç metredir?

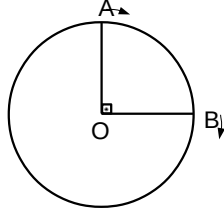


## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### Örnek...11 :

Şekilde  $\widehat{AOB}=90^\circ$ , belirtilen yönde harekete geçen araçlardan A noktasından harekete başlayan aracın hızı dakikada 60 metre ve B den harekete başlayan aracın hızı dakikada 20 metredir. Çembersel pistin çevresi 1200 m ise 5. karşılaşma kaç dakika sonra olur?



$$\text{Ortalama hız} = V_{\text{ort}} = \frac{\text{toplam yol}}{\text{toplam zaman}}$$

#### Örnek...12 :

Bir araç  $2v$  ile gittiği yolu  $4v$  hızla dönmüşse hareket boyunca ortalama hızı kaç  $v$  dir?

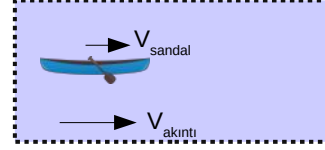
#### Örnek...13 :

Bir aracın  $90 \text{ km/s}$  ile gittiği yolda dönerken hızı  $120 \text{ km/s}$  ise yol boyunca ortalama hızı kaç  $\text{km/s}$  dir?

#### Örnek...14 :

Bir aracın  $40 \text{ km/s}$  ile gittiği yolda dönerken hızı ne olmalıdır ki yol boyunca ortalama hızı  $55 \text{ km/s}$  olsun?

Nehir problemlerinde hız yere göre alınmalıdır.



$$V = V_{\text{sandal}} + V_{\text{akıntı}}$$

#### Örnek...15 :

Saatteki hızı  $40 \text{ km}$  olan bir tekne  $10 \text{ km/sa}$  hızla akan bir akıntıya karşı zıt yönde  $10$  saatte gittiği yolu dönüşte akıntı yönünde hareket ederek kaç saatte alır?

#### Örnek...16 :

Hızı saatte  $180$  kilometre olan  $400$  metre uzunluğundaki bir tren  $90$  saniyede bir tünelden tamamen çıkıyorsa tünel kaç metredir?

#### Örnek...17 :

Birbiriyle yarışan üç arabanın birincisi bitiş çizgisini geçtiğinde ikincinin  $10 \text{ km}$  üçüncünün ise  $25 \text{ km}$  yolu kalmıştır. 2. durumdaki yarışmacı yarışmayı bitirdiğinde üçüncünün  $20 \text{ km}$ 'lik yolu kalmışsa pist kaç kilometredir?

#### Örnek...18 :

Saat  $17.14$  de akrep ile yelkovan arasındaki geniş açı kaç derecedir?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### YÜZDE KAR ZARAR PROBLEMLERİ

1) Bir x sayısının % a sı  $x \cdot \frac{a}{100}$

2) Bir X sayısının % a zaltılması  
 $x \cdot \left(\frac{100-a}{100}\right)$

3) Bir X sayısının % a arttırılması  
 $x \cdot \left(\frac{100+a}{100}\right)$

#### Örnek...1 :

80 sayısının %40 ı kaçtır?

#### Örnek...2 :

%15 ile %6 sı arasındaki fark 117 olan sayının %60'ı kaçtır?

#### Örnek...3 :

Giderlerinin %60 ını kiraya veren bir kişinin giderleri dairesel bir grafikte temsil edilecek olsa kirayı gösteren kısımdaki merkez açı kaç derece olur?

#### Örnek...4 :

Lokantaya giden bir grup hesabı eşit olarak bölüşecektir. Lakin iki kişi cüzdanlarını yanına almadıklarını fark ediyor ve diğerleri ilk duruma göre %50 daha fazla ödemek zorunda kalıyor ise grup kaç kişidir?

#### Örnek...5 :

Bir havuzun %20 si doludur. Havuza 275 Lt su konulunca havuzun %25 i boş kalıyorsa bu havuz toplam kaç Lt su alır?

#### Örnek...6 :

Bir sınavda başarı sırasına göre yüzde 5'lik dilime ilk giren kişi sınavda 4821. kişiyse sınava kaç kişi girmiştir?

#### Örnek...7 :

Bir kenarı x olan bir karenin kenarı %20 arttırılınca çevresi 40 cm artıyorsa ilk karenin alanını bulunuz.

#### Örnek...8 :

Yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığının %20 sini fire veriyor. Elinde 60 kg kuru üzüm bulunan kişi kaç kg yaş üzüm almıştır?

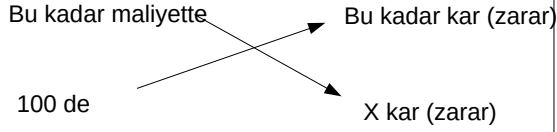
## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

4) Kar veya zarar=satış fiyatı-maliyet fiyatı

#### UYARI

1.Kar zarar hesaplarında yüzde bulmak için birim maliyet üzerinden elde edilen kar veya zarar oranı için orantı kullanabiliriz. Orantı şu şekildedir



2.Kar ve zarar hesaplarında yüzde oranları dışında sayılarla uğraşmıyorsak başlangıç miktarını yüz alarak işlemleri kolaylaştırabiliriz.

#### Örnek...9 :

400 tl lik bir mal 480 tl ye satıldığında kar % kaç olur?

#### Örnek...10 :

A TL ye alınan bir mal %30 kar ile A+21 TL ye satılmış ise A kaçtır?

#### Örnek...11 :

Maliyeti üzerinden %40 karlı fiyatı 700 tl olan bir maliyeti üzerinden %20 indirimli satış fiyatı kaç tl olur?

#### Örnek...12 :

%20 karla satılan bir mala %25 indirim yapıldığında satış fiyatı 720 TL oluyorsa yapılan indirim kaç TL dir?

#### Örnek...13 :

Bir malın fiyatı %20 düşürüldüğünde o malın satışı yüzde kaç artmalıdır ki kasaya giren para değişmesi?

#### Örnek...14 :

Maliyetleri aynı olan iki maldan birinci x TL ye satılırsa %60 kar , ikinci y TL ye satılırsa %40 zarar ediliyor. Buna göre  $\frac{x}{y}$  kaçtır?

#### Örnek...15 :

Arka arkaya iki defa %30 zam gelen elektrik fiyatındaki artış toplam yüzde kaç olur?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### Örnek...16 :

Biletleri satarken %40 kar yapan bir şirket öğrencilere satış fiyatı üzerinden %20 indirim yapıyorsa öğrencilerden yüzde kaç kar elde eder?

#### Örnek...17 :

Bir malın yarısı %20 zararla kalanın yarısı %30 karla satılıyor. Son kalan kısımda %10 karla satılırsa tüm malın satışı sonunda durum ne olur?

#### Örnek...18 :

Taşıma sırasında  $\frac{1}{5}$  l kırılan bardaklar için maliyet yüzde kaç oranda artmıştır?

#### Örnek...19 :

Kilosu 500 TL maliyetle elde edilen çay kurutulunca ağırlığının %25 ini kaybediyor. Kurutulduktan sonra satıştan %25 kar elde edilmesi için satış fiyatı ne olmalıdır?

#### KARIŞIM PROBLEMLERİ

A gram %a lık tuzlu su ile B gram %b lik tuzlu su bir kaba dökülürse son karışımın tuz yüzdesi

$$\left( \frac{A \cdot \frac{a}{100} + B \cdot \frac{b}{100}}{A+B} \right) \cdot 100 \text{ olur.}$$

Kısaca yüzde oranı =  $\frac{(\text{saf madde})}{(\text{toplam})} \cdot 100$

#### UYARI

Buharlaştırma kısmında suyun buharlaştığı hesaba katılmalıdır.

#### Örnek...1 :

x kg şekere y kg su ve z kg tuz ekleniyor. Son karışımın su yüzdesi kaçtır?

#### Örnek...2 :

Tuz oranı %20 olan 40 lt tuzlu su ile tuz oranı %40 olan 80 lt olan tuzlu su karıştırılırsa son karışımın tuz yüzdesi ne olur?

#### Örnek...3 :

Tuz oranı %30 olan 40lt tuzlu su ile tuz oranı %40 olan tuzlu su karıştırılırsa son karışımın tuz yüzdesi 36 oluyorsa ikinci karışımın kaç lt konmuştur?

## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

#### Örnek...4 :

Alkol oranı %30 olan 50lt alkol-su karışımına kaç lt su eklenirse son karışımın alkol oranı %25 olur?

#### Örnek...5 :

Aynı havuzu klor oranı %20 olan A musluğu 12 saatte klor oranı % 6 olan B musluğu 16 saatte dolduruyor. Havuz dolduğunda havuzun klor yüzdesi nedir?

#### Örnek...6 :

Tuz oranı %20 olan tuzlu suyun  $\frac{1}{5}$  ü dökülüyor ve dökülen miktar kadar su ekleniyor son karışımında tuz yüzde kaç olur?

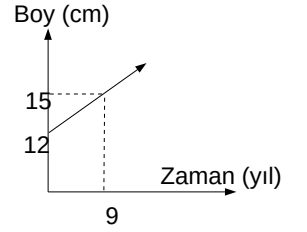
#### Örnek...7 :

Su oranı %75 olan 200 kg tuzlu su karışımına ağırlıkça yüzde kaç buharlaştırılırsa ki son tuz oranı %40 olur?

### GRAFİK PROBLEMLERİ

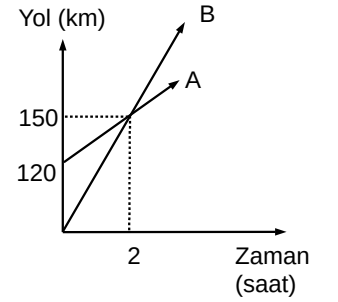
#### Örnek...1 :

Grafik bir bitkinin boyunun zamana göre değişimini vermektedir buna göre bitkinin boyu kaç yıl sonra 45 cm olur?



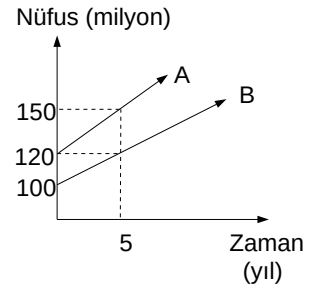
#### Örnek...2 :

Aynı anda harekete başlayan iki araç arası mesafe 13 saat sonra kaç km olur?



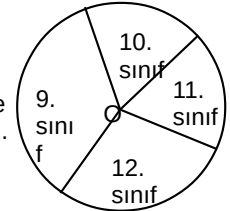
#### Örnek...3 :

Şekilde A ve B ülkelerinde nüfusun zaman bağlı değişimi verilmiştir buna göre bu iki ülke nüfusu arasındaki fark 90 milyon olur?



#### Örnek...4 :

Şekildeki O merkezli dairesel grafikte bir okulda okuyan öğrencilerin sınıflara göre dağılımını göstermektedir. Bu okulda 9. sınıfa giden öğrencilerin tüm öğrencilerin %40 ıdır. 10 ve 11. sınıfa devam eden öğrenci sayısı eşit ve 12. sınıfa devam eden öğrenci sayısının yarısı kadarsa 11. sınıfları gösteren dilimin merkez açısı kaç derecedir?



## DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 10

### PROBLEMLER

Rutin olmayan problemler

#### Örnek...5 :

3 torbada toplam 60 ceviz vardır. Eğer 1.torbadan 2. torbaya 10 ceviz atılır ve sonra 2. torbadan 3. torbaya 4 ceviz atılırsa torbalardaki cevizlerin sayısı eşit oluyor. Buna göre, başlangıçta 1. torbadaki ceviz sayısının 2 ve 3. torbalardaki toplam ceviz sayısına oranı kaçtır?

#### Örnek...6 :

Bir çalışan, maaşına 2017 yılının Mart ve Temmuz aylarında sırasıyla 300 ₺ ve 200 ₺ iki defa zam almıştır. Bu kişinin yılın ilk 6 ayında aldığı toplam maaş, son 4 ayında aldığı toplam maaştan 4200 ₺ fazladır. Buna göre bu çalışanın Haziran ayı maaşı kaç ₺ dir?

#### Örnek...7 :

Tavla turnuvasına hazırlanan Azra Berker ve Cavit'in birbirleriyle yaptıkları maçlar ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

En az maç yapan Berker dir ve 15 maç yapmıştır. En çok maç yapan Cavittir ve 13 maç yapmıştır. Buna göre , Berker ve Azra kendi aralarında kaç maç yapmıştır?

#### Örnek...8 :

Tek maçlı eleme usulüne göre oynanan ve toplam 1600 kişinin katıldığı turnuvada şampiyonluk maçına kadar kaç maç yapılmış olur?

#### Örnek...9 :

Model	2014	2017
Tüketim Miktarı	8,4 lt	4,8 lt

Yukarıdaki tabloda bir araba markasının 2014 ve 2017 modellerinin 100 kilometrede harcadığı benzin miktarları gösterilmiştir. 1 litre benzinin 4,8 ₺ olduğu dönemde günde ortalama 20 kilometre yol yapan bu araçların 25 günlük sürede benzin sarfiyatları arasındaki fiyat farkının kaç ₺ olması beklenir? (Diğer şartların iki araç içinde özdeş olduğu varsayılacaktır.)

#### Örnek...10 :

Yıllık öğrenci pasosunun 80₺ olduğu bir şehirde belediyeye ait otobüslerinde uygulanan fiyatlandırma tarifesi tabloda verilmiştir.

	İndirimli (pasolu)	Sivil
1 biniş	1,1₺	2 ₺
Aylık	120 ₺	200 ₺

Buna göre 1 yıllık sürede toplam 720 defa otobüse binen bir öğrencinin ulaşım için ödeyebileceği en çok para ile en az paranın farkı kaç ₺ dir?

#### Örnek...11 :

Haluk bir kağıda 5,6,7,8 rakamlarının her birini birer kez kullanarak dört basamaklı (abcd) sayısını yazıyor ve arkadaşlarından birer tahmin yapmalarını istiyor. Yapılan tahminler tablodaki gibidir.

Atif	8	5	6	7
Berke	8	6	5	7
Ceren	5	6	7	8
Deniz	5	7	6	8

Ceren ,Haluk'un tuttuğu sayının sadece onlar basamağındaki rakamı doğru bilmiş, diğer üç kişi ise hiçbir basamağını bilememiştir. Buna göre Haluk hangi sayıyı tutmuştur?

## PROBLEMLER

### DEĞERLENDİRMELER

#### DEĞERLENDİRME 1 (SAYI - KESİR)

1) Toplamları 55 olan iki sayıdan, küçüğünün üç katı ile büyüğünün iki katı eşittir. Bu iki sayının toplamı kaçtır?

2) Bir grup arkadaş yemeğe gidiyor. Hesap geldiğinde 5 kişinin parası olmadığı için herkes kendi payına düşenin  $\frac{1}{4}$  ü kadar fazla para veriyorsa grup kaç kişiden oluşmuştur?

3) Bir çubuk 10 parçaya ayrılıyor. Eğer çubuk 7 parçaya ayrılıyorsa her bir parça 45 cm daha uzun olacaktır. Bu çubuğun boyu kaç cm dir?

4) Bir kişi borcunun önce  $\frac{2}{7}$  sini sonra  $\frac{3}{5}$  ini ödüyor. Son olarak da 240 ₺ daha ödeyince geriye 160 ₺ daha borcu kalıyorsa borcun ilk ödediği kısmı kaç ₺ dir ?

5) Yaş üzümün kilosunu 5 ₺ den alan bir kişi elinde kalan kısmı 7 ₺ ye satarsa zarar elde etmediğine göre üzüm kuruyunca ağırlığının ne kadarını kaybeder?

6) Ardışık iki sayının karelerinin farkı 261 ise bu sayılardan büyük olanı kaçtır?

## PROBLEMLER

### DEĞERLENDİRMELER

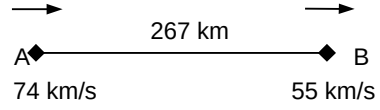
#### DEĞERLENDİRME 2 (YAŞ)

- 1) Beş yıl önce yaşları toplamı 36 olan 3 kişinin 3 yıl sonra yaşları ortalaması kaç olur?
- 2) Mert ve Burak'ın yaşları toplamı 27 dir. 6 yıl sonra yaşları oranı  $\frac{6}{7}$  olacaksa 12 yıl sonra yaşları farkı ne olur?
- 3) Yaşları farklı olan bireylerden oluşan bir ailede  $xy$  yaşında olan baba.  $yx$  yaşında olan anneden çocukların yaşları toplamı kadar büyüktür. Buna göre büyük çocuk en az kaç yaşındadır? ( $xy$  ve  $yx$  iki basamaklıdır.)
- 4) Gabriel, Garcia ve Marquez'in yaşları toplamı 58 dir. Gabriel Garcia'nın yaşına geldiğinde Marquez 26 yaşında olacaktır. Marquez Gabriel'in yaşındayken Garcia 22 yaşındaysa Marquez kaç yaşındadır ?

#### DEĞERLENDİRME 4 (HIZ)

- 1) 740 km lik bir yolun bir kısmı topraktır. Asfalttaki hızı saatte 90 km topraktaki hızı saatte 50 km olan bir araç toplam yolu 10 saatte almışsa yolun toprak kısmı kaç kmdir?

2)



şekildeki hızlarla aynı yöne doğru harekete geçen araçlar arası mesafe 17 saat sonra kaç km olur?

- 3) Bir araç gideceği yolun  $\frac{1}{4}$  ünü 90 km/sa kalanını ise 120 km/sa ile gidiyor ise hareket boyunca ortalama hızı kaç km/sa tir?
- 4) Bir yüzücü akıntıya karşı 12 saatte yüzdüğü mesafeyi dönerken akıntıyla beraber 6 saatte dönüyor. Bu yüzücünün hızının akıntının hızına oranını bulunuz
- 5) Saniyedeki hızı 40 m olan bir tren ile aralarında 420 m olan ve yine saniyedeki hızı 30m olan bir tren birbirlerini 13 sn de geçiyorsa trenlerin boyları toplamını bulunuz

## PROBLEMLER

### DEĞERLENDİRMELER

#### DEĞERLENDİRME 5 (YÜZDE KAR ZARAR)

- 1) Hangi sayının %20 si 29 dur?
- 2) Bir tel soğutulunca boyu %15 azalıyor. Soğutulduğu zaman boyu 340m olan bir telin ilk boyu ne kadardır?
- 3) Bir bakkal tanesini a t'l'ye satmayı düşündüğü y tane yumurtanın k tanesini kırık olduğu için atmak zorunda kalıyor. Kalan yumurtaları kaç liraya satmalı ki zarar etmesin?
- 4) 5 limonu 3 tl den alıp 3 limonu 5 tl den satan bir satıcı kaç limon satarsa 288 tl kâr elde eder?
- 5) 600 TL ye satılan bir mal satış fiyatı üzerinden %20 indirimle satılınca 30 TL kar elde ediliyorsa indirim yapılmadan önceki kar yüzde kaçtır?
- 6) Bir dikdörtgenin kısa kenarı %20 arttırılır, uzun kenarı %30 kısaltılırsa alanı nasıl değişir?
- 7) Maliyeti x TL olan bir mal % 10 karla, maliyeti y olan bir mal %20 zararla satılıyor. Bu iki satışta % 5 kar elde edilmişse x ile y arasındaki bağıntı nedir?
- 8) %20 indirimli satılan bir malı indirimsiz fiyatından satabilmek için fiyatı yüzde kaç artırılmalıdır?
- 9) Bir malın  $\frac{1}{4}$  ü %20 zararla , yarısı %30 karla satılıyor. Son kalan kısmı nasıl satılmalıdır ki son durumda %25 kar yapılsın ?
- 10) Maliyeti üzerinden %20 karla satılan bir malın maliyeti %40 düşmüş fakat satış fiyatı değişmemiştir. Buna göre yapılan kar yüzde kaç olur?
- 11) Bir fabrikada satılan malların %25 i defolu çıkıyor. Sağlam olanlar %40 karla defolu olanlar ise %20 indirimli fiyatla satılıyorsa bu fabrikanın kar zarar durumu nedir?

## PROBLEMLER

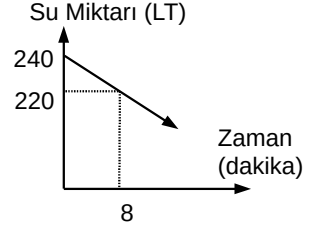
### DEĞERLENDİRMELER

#### DEĞERLENDİRME 6 (KARIŞIM)

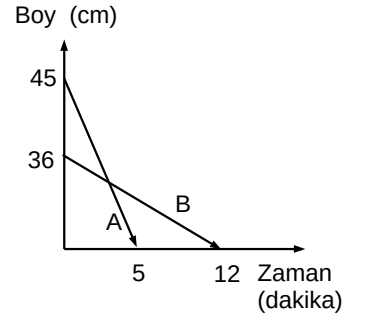
- 1) Şeker oranı %25 olan 80 lt şekerli suya 30 lt su 40 lt şeker eklenirse son karışımın su yüzdesi ne olur?
- 2) Şeker oranı %40 olan bir miktar şekerli suya içindeki kadar su eklenirse son şeker yüzde kaç olur?
- 3) Şeker oranı %25 olan 160 kg şekerli suya kaç kilo şeker eklenirse son şeker oranı %40 olur?
- 4) Alkol oranı %75 olan 160 kg alkol su karışımına kaç kilo şeker eklenirse son alkol oranı %40 olur?
- 5) Tuz oranı %20 olan 150 kg tuzlu suyun  $\frac{1}{3}$  ü ile su oranı %75 olan 750 kg tuzlu suyun  $\frac{1}{5}$  i karıştırılırsa son durumda ağırlıkça yüzde kaç tuz olur?

#### DEĞERLENDİRME 8 (GRAFİK)

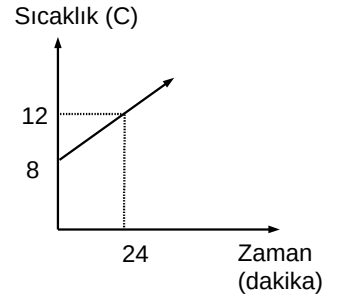
- 6) Şekil hacmi 240 litre olan bir havuzun tabanındaki bir musluğun açılmasıyla havuzda kalan su miktarının zamana göre değişimi verilmiştir. Havuz doluyken bu musluğa eş bir musluk havuzu boşaltacak şekilde havuzun tam ortasına konulursa havuz kaç saatte boşalır?



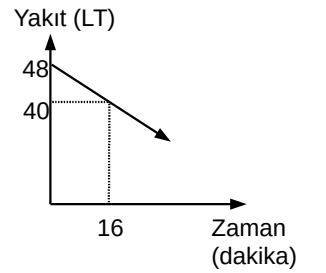
- 7) Şekilde aynı anda yakılan mumların boylarının zamana göre değişimi verilmiştir. Buna göre kaçınıcı dakikada bir mumun boyu diğerinin iki katı olur?



- 8) Şekilde bir A maddesinin sıcaklığının zamana göre değişimi veriliyor. Bu maddenin sıcaklığı kaçınıcı dakikada 38 derece olur?



- 9) Şekilde bir aracın yakıt deposundaki benzinin zamana bağlı değişimi görülmektedir. Hızı saatte 80 km olan bu araç durana kadar kaç km yol alır?



## PROBLEMLER

### DEĞERLENDİRMELER

#### SÖZEL MANTIK PROBLEMLERİ

- 1) Azra , Batuhan, Cavit,Dursun,Esin,Faruk  
1,2,3,4,5,6 numaralı koltuklara aşağıda belirtildiği  
gibi oturmaktadırlar

Faruk'un oturduğu numara Cavitin oturduğu  
numaradan büyüktür  
Batuhan ve Cavit arasında oturan kişi bir kızdır  
Dursun'un koltuk numarası Batuhanın koltuk  
numarasından küçüktür.  
Kızlar çift numaralı koltuklarda oturmaktadırlar

Verilenlere göre kaç kişinin oturduğu koltuk kesin  
olarak belirlidir?

- 2) Bir törende sahne alacak Azra , Batuhan,  
Cavit,Demet,Emre,Fatma adlı kişilerin tören de  
sahneye gelme sıraları ile ilgili aşağıdakiler  
bilinmektedir

Demetten hemen sonra bir kadın şiir okumuştur.  
Bir erkek Azra dan sonra ve Cavitten önce  
konuşma yapmıştır  
Batuhan Fatmadan hemen sonra konuşmuştur.  
En son sahneye çıkan Cavittir

verilenlere göre 4. sırada sahneye kim çıkmıştır?

- 3) Azra , Bengü, Cavit,Demet,Emre bir kitapçıdan 4  
dergi 3 kitap 2 kalem ve 1 bloknot almıştır.  
Aşağıdakiler bilinmektedir  
Cavit dergi almamıştır  
Kitap alan herkes dergi de almıştır  
Azra ve Demet aynı şeyleri almıştır.  
Aynı tür malzemeden en fazla 1 tane olmak  
koşuluyla herkes tam olarak 2şer şey almıştır

Verilenlere göre kimlerin ne aldığı kesin olarak  
bilinmektedir?

- 4) Trafik ışıklarına bakmakta olan Azra , Bengü ve  
Cavit için aşağıdakiler bilinmektedir.  
Cavit kırmızıyı sarı algılamaktadır  
Azra sarıyı yeşil , yeşili kırmızı algılamaktadır  
Bengü sarıyı da kırmızıyı da yeşil algılamaktadır

Verilenlere göre yeşil ışıkta kimler yolun karşısına  
geçmek için hamle yapar?

- 5) Bir futbol turnuvasına katılan A,B,C,D,E,F, G,H  
takımları tek maçlı eleme usulüne göre  
karşılaşıyorlar. Şampiyonun A olduğu bu turnuvada  
şunlar biliniyor:  
1. turda B ile C, E ile G karşılaşmıştır  
1. turda D H ile karşılaşmamıştır  
2. turda E ile C karşılaşmıştır.  
D bir maç E iki maç oynamıştır

Buna göre şampiyon kimlerle karşılaşmıştır?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

#### BÖLME İŞLEMİ VE ÖZELLİKLERİ

A, B, C, K doğal sayılar ve  $B \neq 0$  olmak üzere,

$$\begin{array}{r} \text{BÖLÜNEN} \leftarrow \text{A} \quad | \quad \text{B} \rightarrow \text{BÖLEN} \\ - \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \text{C} \rightarrow \text{BÖLÜM} \\ \hline \text{KALAN} \leftarrow \text{K} \end{array}$$

Bu bölme işleminde;

1)  $A = B \cdot C + K$       2)  $0 \leq K < |B|$

3)  $K=0$  ise A sayısı B'ye tam bölünür denir ve  $B | A$  şeklinde yazılır, "B böler A" diye okunur.

4)  $K < C$  ise B ile C yer değiştirilebilir.

#### Örnek...1 :

Yandaki bölme işleminin bölüm ile kalanın toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{r} b \ a \ b \ a \ 5 \quad | \quad b \ a \\ - \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \\ \hline \end{array}$$

#### Örnek...2 :

A, x, y birer doğal sayı olmak üzere, yandaki bölme işleminde y'nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

$$\begin{array}{r} A \quad | \quad 13 \\ - \quad \quad | \quad x \\ \hline y \end{array}$$

#### Örnek...3 :

Yandaki bölme işlemlerinde a, b, c sıfırdan farklı

$$\begin{array}{r} a \quad | \quad b \\ - \quad \quad | \quad 4 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} b \quad | \quad c \\ - \quad \quad | \quad 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

pozitif tam sayılar olmak üzere, a'nın c türünden eşiti nedir?

#### Örnek...4 :

x sayısının y ile bölümündeki bölüm 2 ve kalan 5 tir. y sayısının z ile bölümündeki bölüm 3 ve kalan 7 dir. x sayısının 6 ile bölümündeki kalan kaçtır?

#### Örnek...5 :

A, B, C birbirinden farklı doğal sayıları için, yandaki bölme işleminde B ile C nin yer değiştirmesi, sonucu değiştirmedikçe göre, A en az kaç olabilir?

$$\begin{array}{r} A \quad | \quad B \\ - \quad \quad | \quad C \\ \hline 12 \end{array}$$

#### Örnek...6 :

Yandaki bölme işleminde A ve n birer doğal sayıdır. A'nın alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

$$\begin{array}{r} A \quad | \quad 9 \\ - \quad \quad | \quad 2.n+3 \\ \hline n-1 \end{array}$$

#### ASAL SAYI

Sadece 1 ve kendisine bölünen sayılara asal sayı denir. En küçük asal sayı tek çift asal sayı olan 2 dir.

#### Örnek...7 :

a ve b doğal sayılar olmak üzere  $a^2 - b^2 = 13$  ise  $a^2 + b^2$  kaçtır?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

#### ARALARINDA ASAL SAYI

Ortak pozitif tam sayı böleni sadece 1 olan sayılara aralarında asal sayılar denir.  
Örneğin 26 ve 15 aralarında asaldır.

#### Örnek...8 :

5, 12 ve 13 sayıları aralarında asal mıdır?

#### ASAL ÇARPANLARA AYIRMA

1 den büyük bir doğal sayının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılmasına sayının asal çarpanlara ayrılması denir.  
x, y farklı asallar olmak üzere,  
 $A = x^m \cdot y^n$   
yazımı A'nın asal çarpanlarına ayrılmış biçimidir.

#### Örnek...9 :

360 sayısını asal çarpanlarına ayırınız?

#### Örnek...10 :

A, x ve y tam sayılar olmak üzere,  
 $80! = 2^x \cdot 5^y \cdot A$   
ise x ve y en çok kaçtır?

#### Örnek...11 :

9! sayısını asal çarpanlarına ayırınız?

#### Örnek...12 :

45! sayısının sondan kaç basamağı 0 dır?

#### Örnek...13 :

$360 \cdot x = y^2$  eşitliğini sağlayan en küçük x ve y pozitif tam sayılarını bulunuz?

#### Örnek...14 :

360 sayısının

- kaç asal böleni vardır?
- kaç pozitif tam sayı böleni vardır?
- kaç tam sayı böleni vardır?
- asal olmayan kaç pozitif böleni vardır?

#### BİLGİ

Asal çarpanlara ayrılmış biçimi  
 $A = x^m \cdot y^n \cdot z^k$   
olan A sayısının  $(m+1) \cdot (n+1) \cdot (k+1)$   
çarpımının sonucu kadar pozitif tam sayı böleni vardır.

#### BÖLÜNEBİLME KURALLARI

##### 2'YE 5'E VE 10'A BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam çiftse, bu sayı 2 ile kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 2 ye bölümünden kalanı verir.

Bir doğal sayının birler basamağı 0 veya 5 ise, bu sayı 5 ile kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 5 e bölümünden kalanı verir.

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ise, bu sayı 10 ile kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 10 a bölümünden kalanı verir.

#### Örnek...15 :

Dört basamaklı  $a74a$  sayısı 2 ile kalansız bölünebildiğine göre,  $a$  kaç farklı değer alabilir?

#### Örnek...16 :

$732a$  rakamları farklı, dört basamaklı, 2 ile bölündüğünde 1 kalanı veren doğal sayıdır.  $a$  nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

#### Örnek...17 :

$abcd$  sayısı 30000 den büyük ve ikiye bölündüğünde 1 kalanını veren beş basamaklı bir sayıdır.  $a$  nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

#### Örnek...18 :

Dört basamaklı  $357m$  sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre,  $m$  nin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

### 3' E VE 9' A BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

Bir doğal sayının rakamlarının sayı değerlerinin toplamı 3 ün ( 9 un) katı ise, bu sayı 3 ile ( 9 ile) kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 3 e veya 9 a bölümünden kalanı verir.

#### Örnek...19 :

$52A3$  dört basamaklı sayısının 3 ile kalansız bölünebilmesi için,  $A$  yerine yazılabilecek rakamların kümesini bulalım.

#### Örnek...20 :

$A = 2ab54317$  sayısının rakamları farklı ve 9 ile bölünebilen bir sayı olduğu bilindiğine göre  $a.b$  çarpımı kaç olabilir?

#### Örnek...21 :

33 basamaklı  $858585\dots858$  sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

#### Örnek...22 :

Dört basamaklı  $a37b$  sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 dir. Bu sayı 9 ile kalansız bölünebildiğine göre,  $a$  kaçtır?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME – BÖLÜNEBİLME

#### 4 İLE VE 8 İLE BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

Bir doğal sayının birler ve onlar basamağındaki rakamlarının oluşturduğu sayı 00 ya da 4 ün katı ise, 4 ile kalansız bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 4 e bölümünden kalanı verir.

Bir doğal sayının birler , onlar yüzler basamağındaki rakamlarının oluşturduğu sayı 000 ya da 8 in katı ise, 8 ile kalansız bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 8 e bölümünden kalanı verir.

#### Örnek...23 :

54675 beş basamaklı doğal sayının 4 ve 8 ile bölümünden kalanlar çarpımı kaçtır?

#### Örnek...24 :

Dört basamaklı 735m sayısı, 4 ile bölündüğünde kalan 3 olduğuna göre, m rakamı kaç farklı değer alır?

#### 11 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :

Bir doğal sayının basamakları 1' ler basamağından başlanarak sola doğru " +, -, +, -, +, ..." biçiminde işaretlenir. Bu işaretlerle rakam değerleri çarpılarak toplanır. Elde edilen sonuç 0 veya 11 in katı ise bu sayı 11 ile kalansız bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 11 e bölümünden kalanı verir.

#### Örnek...25 :

Altı basamaklı 245 795 sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

#### Örnek...26 :

Altı basamaklı 3275a7 sayısı 11 ile kalansız bölündüğüne göre, a kaçtır ?

#### Örnek...27 :

Rakamları farklı, üç basamaklı pozitif tam sayıların en büyüğü ve en küçüğünün çarpımlarının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

#### Örnek...28 :

87xy sayısı 2 ve 11 ile tam bölünebildiğine göre, x' in alacağı değerler toplamı kaçtır?

#### 7 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :

$$\begin{array}{r} + \quad - \quad + \\ ab \quad cde \quad fgh \\ 31 \quad 231 \quad 231 \end{array}$$

şeklindeki bir sayı birler basamağından başlanarak üçlü gruplara (yani bölüklere) ayrılarak sırasıyla " ... , -, +, -, + " şeklinde işaretlenir. İşaretli grupların rakamları soldan sağa 2,3 ve 1 sayılarıyla sırasıyla çarpılır ve sonuç bulunur. Bu sonuç 7 nin katı ise sayı 7 ye tam bölünür. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 7 ye bölümünden kalanı verir.

#### Örnek...29 :

322 667 sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

#### Örnek...30 :

1234567 sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

**6, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 45 İLE BÖLÜNEBİLME KURALLARI :**

**BÖLÜNEBİLMEİN TEMEL KURALI :**

m ile n **aralarında asal** iki sayı olsun, m ve n ile kalansız bölünebilen sayılar m.n çarpımı ile de kalansız bölünür. Dolayısı ile m.n' ye tam bölünebilen bir sayıda hem m' ye hem de n' ye tam bölünebilir.

Bir sayı 6 ile bölünebiliyorsa hem 2 hem de 3' e tam bölünebilir.

Bir sayı 24 ile bölünebiliyorsa hem 3 hem de 8' e tam bölünebilir. (Ama hem 6 hem 4 ile bölünemez.)

**Örnek...31 :**

Bir sayının aşağıdaki sayılara bölünebilmesi için hangi sayılara tam olarak bölünmesi gerekir?

12 =	15 =	18 =
20 =	30 =	36 =
45 =	55 =	63 =

**Örnek...32 :**

Dört basamaklı 634a sayısının 6 ile kalansız bölünebilmesi için, a yerine yazılabilecek rakamların toplamı kaçtır?

**Örnek...33 :**

Dört basamaklı 4a7b sayısı 45 ile kalansız bölündüğüne göre, a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

**Örnek...34 :**

Beş basamaklı 847AB sayısı 15 ile bölümünden kalan 6 ise A+B kaç olabilir?

**Örnek...35 :**

Altı basamaklı 317a2b sayısı 12 ile bölümünden 7 kalıyor ise a+b toplamı en çok kaç olabilir?

**16 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :**

Bir doğal sayının son dört basamağının oluşturduğu sayı 0000 ya da 16'nın katı ise, bu sayı 16 ile kalansız bölünür. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 16 ya bölümünden kalanı verir.

**25 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :**

Bir doğal sayının birler ve onlar basamağının oluşturduğu iki basamaklı sayı 00 ya da 25'in katı ise, o doğal sayı 25 ile kalansız bölünür. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 25'e bölümünden kalanı verir.

**EBOB**

İkisi birden sıfır olmayan a ve b tam sayılarının ikisini birden bölen en büyük pozitif tam sayıya bu sayıların **en büyük ortak böleni** (EBOB) denir ve  $EBOB(a,b)=x$  biçiminde gösterilir.

EBOB bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak asal çarpanlardan en küçük üslülerin çarpımı bu sayıların EBOB'unu verir.

**Örnek...36 :**

$EBOB(240,672)=?$

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

#### EBOB ÖZELLİKLERİ

- 1)  $EBOB(a,b)=EBOB(b,a)=EBOB(-a,b)$
- 2)  $EBOB(a,b+c.a)=EBOB(a,b)$
- 3)  $EBOB(a,b) \leq \min\{|a|,|b|\}$
- 4)  $EBOB(a,b)=1$  ise a ile b aralarında asal sayıdır.

#### EKOK

Sıfırdan farklı a ve b tam sayılarının katlarından en küçük olup ortak olanına bu sayıların **En Küçük Ortak Katı (EKOK)** denir.

EKOK bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak asal çarpanlardan en büyük üslüleri ve ortak olmayan çarpanların çarpımı bu sayıların EKOK ini verir.

#### Örnek...37 :

$EKOK(36,120)=?$

#### EKOK ÖZELLİKLERİ

- 1)  $EKOK(a,b)=EKOK(b,a)$
- 2)  $EKOK(a,b) \geq \max\{|a|,|b|\}$
- 3)  $EBOB(a,b).EKOK(a,b)=a.b$

#### Örnek...38 :

x,y,z birbirlerinden farklı asal sayılardır.

$$A=x^2 \cdot y \cdot z^3$$

$$B=x \cdot y^3 \cdot z^2 \quad \text{olduğuna göre,}$$

$$C=x^4 \cdot z$$

$\frac{EKOK(A,B,C)}{OBEB(A,B,C)}$  ifadesinin eşitini bulunuz

#### Örnek...39 :

96,112,120 sayılarını tam olarak bölen en büyük doğal sayı kaçtır?

#### Örnek...40 :

A, a,b,c birer doğal sayıdır.

$A=24 \cdot a+2=15 \cdot b+2=18 \cdot c+2$  olduğuna göre , 1000 den küçük en çok A değeri vardır?

#### Örnek...41 :

Meriç elindeki cevizleri 3 erli 5erli ve 8 erli saydığında her seferinde 2 cevizi artıyor. 500 den fazla cevizi olan Meriç'in elinde en az kaç ceviz vardır?

#### Örnek...42 :

1000 den en küçük hangi doğal sayıyı çıkarırsak elde edilen sayı 12 ve 15 e tam olarak bölünür?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

#### Örnek...43 :

Boyu 120 metre eni 72 metre olan dikdörtgen biçimli bir arsanın etrafına eşit aralıklarla ve köşelerine birer tane gelecek şekilde ağaç dikilecektir.

Bu iş için en az kaç ağaç gerekir?

#### Örnek...44 :

Boyutları 8 cm, 15 cm ve 20 cm olan tuğlalar kullanarak hacmi en küçük ve içi dolu bir küp yapılmak isteniyor. En az kaç küp kullanılır?

#### Örnek...45 :

$EKOK(A,B)=120$  ve  $EBOB(A,B)=6$  ise  $A+B$  kaç olabilir?

#### Örnek...46 :

En büyük ortak böleni 24 olan birbirinden farklı 3 sayının toplamı en az kaçtır?

#### Örnek...47 :

En küçük ortak katları 80 olan birbirinden farklı 3 sayının toplamı en çok kaçtır?

#### Örnek...48 :

9 günde bir nöbet tutan bir kişi ilk nöbetini salı günü tutmuştur. 8. nöbetini hangi gün tutar?

#### Örnek...49 :

Cumartesi gününden 500 gün sonra hangi gün olur?

#### Örnek...50 :

5 Ocak 2016'nın Salı günü olduğu bir yılda, 27 Temmuz hangi güne rastlar?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

#### Örnek...51 :

6 gün çalışıp 2 gün tatil yapan bir işçi, işe Salı günü başladığına göre, 11. tatil günü hangi gündür?

#### Örnek...52 :

6 ve 15 günde bir aynı limandan sefere çıkan iki gemi Pazar günü beraber sefere çıkmışlardır. Bundan sonra ikinci defa beraber sefere hangi gün çıkarlar?

#### Örnek...53 :

6 gün çalışıp 2 gün tatil yapan bir işçi, işe Salı günü başladığına göre, 21. tatil günü hangi gündür?

#### Örnek...54 :

Beş günde bir nöbet tutan asker, ilk nöbetini Salı günü tuttuğuna göre, 25. nöbetini hangi gün tutar?

#### Örnek...55 :

Herhangi bir yılın Temmuz ayında 5 tane Pazartesi günü vardır. Bunlardan üçünün tarihi tek sayı olduğuna göre, 9 Temmuz hangi gün olabilir?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

#### DEĞERLENDİRME :

- 1) Yanda verilen bölmelerde  $x, y, z$  pozitif tam sayı olduğuna göre,  $\frac{x+y+z-20}{5z}$  oranının değeri kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ - & 5 \\ \hline & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} y & z \\ - & 4 \\ \hline & 3 \end{array}$$

- 2) Yandaki bölme işleminde A sayısı en çok kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} A & 15 \\ - & 2.n+2 \\ \hline & n^2+n \end{array}$$

- 3) X sayısının 6 ile bölümünden kalan 5 ve bölüm Y dir. Y nin 5 ile bölümünden kalan 2 ise X in 15 ile bölümünden kalan kaçtır?
- 4) İkiye tam bölünebilen iki basamaklı doğal sayıların kaç tanesi beşe kalansız bölünebilir?
- 5) Beş basamaklı 57m32 sayısının 9 ile bölümünden kalanın 7 olması için, m kaç olmalıdır?

- 6) 98765 sayısının karesinin 11' e bölümünden kalan kaçtır?

- 7)  $23 \times 7y$  beş basamaklı sayısı 5 ve 11 ile tam bölünebildiğine göre, x in değerleri çarpımı kaçtır?

- 8) Dört basamaklı  $45a2$  sayısının 4 ile kalansız bölünebilmesi için, a yerine yazılabilecek rakamların kümesini bulunuz?

- 9) Dört basamaklı  $58x2$  sayısı 8 ile kalansız bölünebildiğine göre, x in alacağı değerler çarpımı kaçtır?

- 10)  $356 \times 8y$  altı basamaklı sayısı 36 ile tam bölünebildiğine göre, x lerin toplamı kaçtır?

- 11) Dört basamaklı  $47a5$  sayısı 25 ile kalansız bölünebildiğine göre, a kaç farklı değer alır?

## BÖLÜNEBİLME

### BÖLME - BÖLÜNEBİLME

---

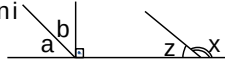
- 12)  $24 \times 78y$  altı basamaklı çift sayının 45 ile bölümünden kalan 17 olduğuna göre,  $x$  kaçtır?
- 13)  $478x5y$  altı basamaklı sayının 30 ile bölümünden kalan 17 olduğuna göre,  $x$  lerin çarpımı kaçtır?
- 14)  $48! + 49! - 1$  sayısının sondan kaç basamağı 9 dur?
- 15)  $EKOK(A,B)=120$  ve  $EBOB(A,B)=6$  ise  $A+B$  kaç olabilir?
- 16) En büyük ortak böleni 24 olan birbirinden farklı 3 sayının toplamı en az kaçtır?
- 17) En küçük ortak katları 90 olan birbirinden farklı 4 sayının toplamı en çok, en az kaçtır?
- 18) İNTEGRALİNTEGRALİNTEGRAL .... şeklindeki bir yazılışta 976461. harf nedir?
- 19) 1 Aralık'ın Pazar günü olduğu bir yılda, yeni yılın ilk günü hangi güne rastlar?
- 20) Perşembe günü saat 13:00' ı gösteren bir saat, 2010 saat sonra hangi gün ve saati gösterir?

# ÜÇGENLER-1

## ÜÇGENDE AÇILAR

### DOĞRUDA VE ÜÇGENDE AÇI BAĞINTILARI

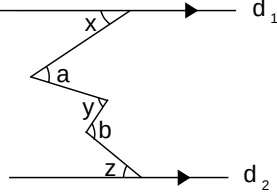
1. Tümler açılar birbirlerini  $90^\circ$  ye bütünler açılar birbirlerini  $180^\circ$  ye tamamlar



### Örnek...1 :

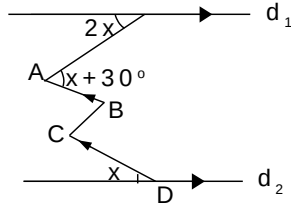
Bütünler iki açının oranı 0,6 ise küçük açının tümleri kaç derecedir?

2.  $d_1$  ve  $d_2$  paralel doğrular ise oluşan açılar için  $x+y+z=a+b$  bağıntısı geçerlidir



### Örnek...2 :

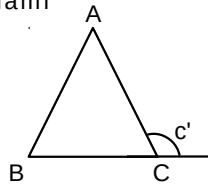
Şekilde  $d_1 \parallel d_2$ ,  $AB \parallel CD$  dir. Verilen açı ölçülerine göre  $x$  kaçtır?



3. Üçgende iç açılar toplamı  $180^\circ$ , dış açılar toplamı  $360^\circ$  dir.

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$$

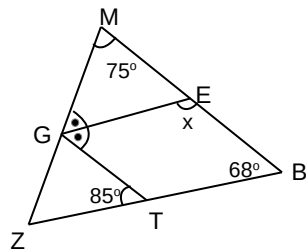
$$m(\widehat{A}') + m(\widehat{B}') + m(\widehat{C}') = 360^\circ$$



Bir dış açı komşu olmayan iki içi açının toplamıdır.  
 $m(\widehat{C}') = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$

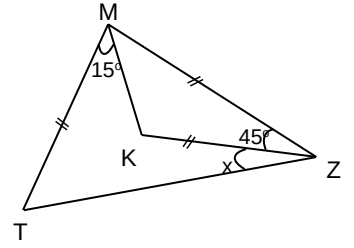
### Örnek...3 :

MBZ bir üçgendir.  
 $m(\widehat{M}) = 75^\circ$ ,  $m(\widehat{B}) = 68^\circ$   
 $m(\widehat{ZTG}) = 85^\circ$  ve [EG] açıortay ise  
 $m(\widehat{GEB}) = x$  kaç derecedir?

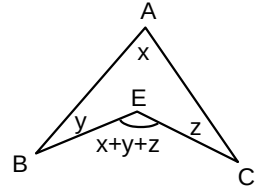


### Örnek...4 :

MTZ bir üçgendir.  
 $|TM| = |MZ| = |KZ|$ ,  
 $m(\widehat{KZM}) = 45^\circ$ ,  $m(\widehat{KMT}) = 15^\circ$   
olduğuna göre  $x$  kaç derecedir?

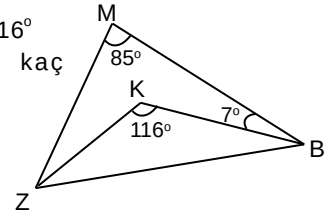


4. Şekilde  
 $m(\widehat{BEC}) = x+y+z$

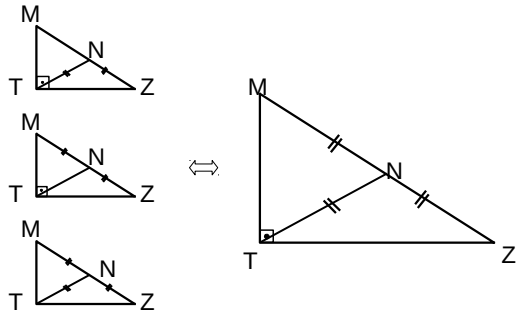


### Örnek...5 :

MBZ bir üçgendir.  
 $m(\widehat{BMZ}) = 85^\circ$ ,  $m(\widehat{BKZ}) = 116^\circ$   
 $m(\widehat{MBK}) = 7^\circ$ ,  $m(\widehat{MZK})$  kaç derecedir?

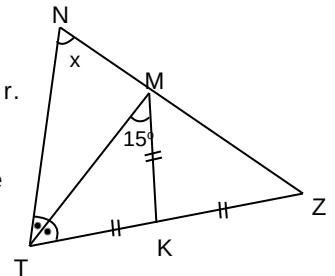


5. Hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu ayırdığı parçalar kadardır



### Örnek...6 :

NTZ bir üçgendir.  
[TM] açıortaydır.  
 $m(\widehat{TMK}) = 15^\circ$   
 $|TK| = |KZ| = |MK|$  ise  
 $m(\widehat{N})$  kaç derecedir?

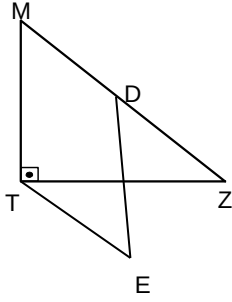


## ÜÇGENLER-1

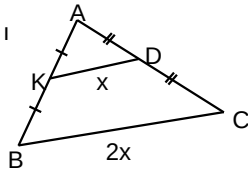
### ÜÇGENDE AÇILAR

#### Örnek...7 :

MTZ bir dik üçgen  
 $m(\widehat{MTZ})=90^\circ$  , D noktası  
 [MZ] nin orta noktası,  
 $|TE|=|DZ|$  ,  $m(\widehat{TED})=32^\circ$  ,  
 $m(\widehat{EDZ})=38^\circ$   
 ise  $m(\widehat{ZTE})$  kaç  
 derecedir?

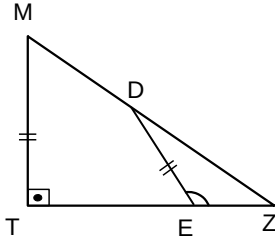


6. Bir üçgende iki  
 kenarın orta noktasını  
 birleştiren doğru  
 parçası diğer kenara  
 paralel ve yarısı  
 kadardır.  
 $|BC|=2 \cdot |KD|$

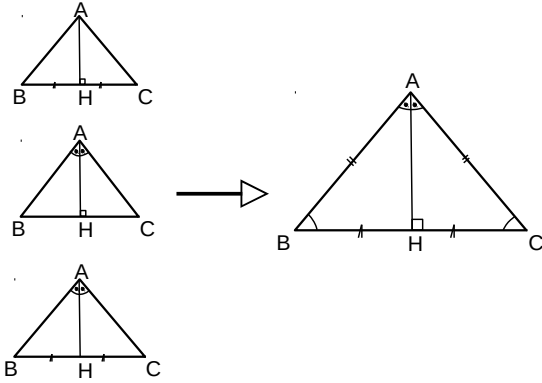


#### Örnek...8 :

MTZ bir dik üçgen  
 $m(\widehat{MTZ})=90^\circ$  , D noktası  
 [MZ] nin orta noktası,  
 $|MT|=|DE|$  , ise  $m(\widehat{DEZ})$   
 kaç derecedir?



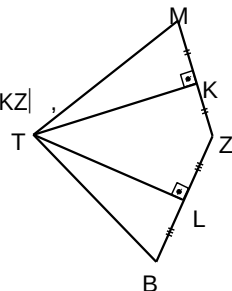
7. Bir köşeye ait yükseklik, kenarortay ve  
 açıortaydan herhangi ikisi aynı doğru



parçası ise üçgen en azından  
 ikizkenardır.

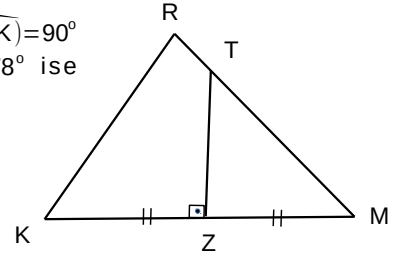
#### Örnek...9 :

MTBZ bir dörtgendir.  
 $[MZ] \perp [TK]$ ,  $[TL] \perp [BZ]$  ,  $|KM|=|KZ|$  ,  
 $|BL|=|LZ|$   $m(\widehat{MZB})=112^\circ$   
 olduğuna  $m(\widehat{MTB})$  kaç  
 derecedir

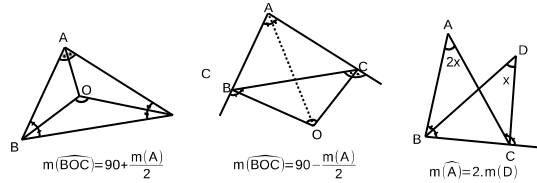


#### Örnek...10 :

RKM bir üçgen  $m(\widehat{TZK})=90^\circ$   
 $|KR|=|TM|$  ,  $m(\widehat{MRK})=78^\circ$  ise  
 $m(\widehat{M})$  kaç derecedir?



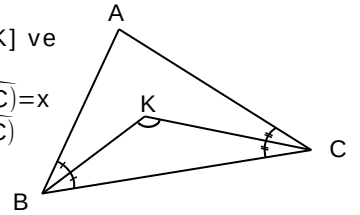
8. Üçgende iç açıortaylar iç teğet  
 çemberin merkezinde kesişir.  
 Üçgende iki dış ve diğer üçüncü köşenin  
 iç açıortayları üçgenin dışında, dış teğet  
 çemberlerin birinin merkezinde kesişir



Yükseklikler ve kenarortaylar da tek  
 noktada kesişir

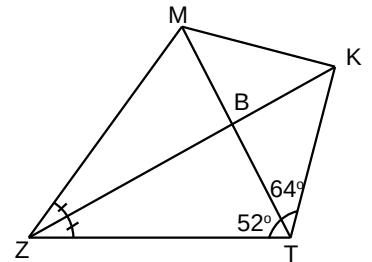
#### Örnek...11 :

ABC bir üçgendir. [BK] ve  
 [KC] açıortaylardır.  
 $m(\widehat{BKC})=x+55$  ,  $m(\widehat{BAC})=x$   
 olduğuna göre  $m(\widehat{BKC})$   
 kaç derecedir?



#### Örnek...12 :

MTZ bir üçgendir.  
 [KZ] , MZT açısının  
 açıortaydır.  
 $m(\widehat{MTZ})=52^\circ$  ,  
 $m(\widehat{MTK})=64^\circ$   
 olduğuna göre  
 $m(\widehat{MKZ})$  kaç  
 derecedir?

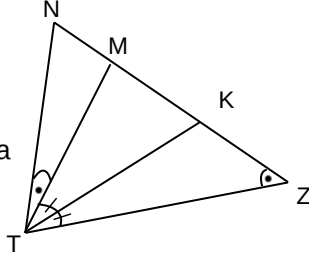


# ÜÇGENLER-1

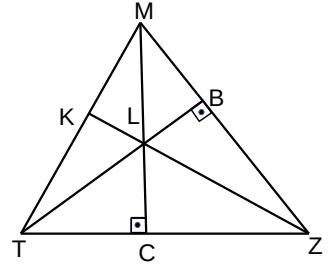
## ÜÇGENDE AÇILAR

### DEĞERLENDİRME -1

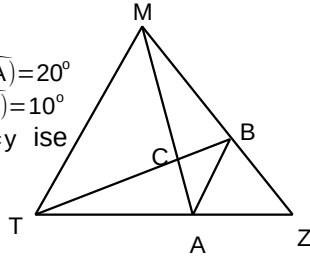
- 1) NTZ bir üçgendir. [TK] MTN açısının açıortayıdır.  $m(\widehat{TKN})=68^\circ$ ,  $m(\widehat{NTZ})=84^\circ$  olduğuna göre  $m(\widehat{NZT})$  kaç derecedir?



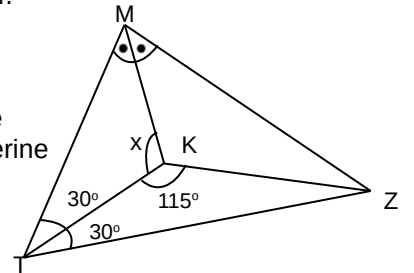
- 4) MTZ bir dik üçgen  $m(\widehat{TBZ})=m(\widehat{MCT})=90^\circ$ ,  $m(\widehat{KTL})=20^\circ$  ise  $m(\widehat{BLZ})-m(\widehat{BZL})$  kaç derecedir?



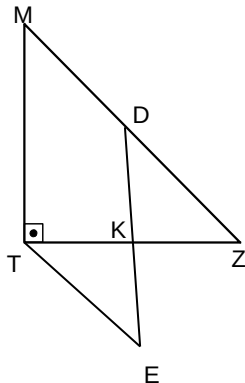
- 2) MTZ bir üçgendir,  $m(\widehat{TMA})=50^\circ$ ,  $m(\widehat{BMA})=20^\circ$ ,  $m(\widehat{MTB})=55^\circ$ ,  $m(\widehat{BTA})=10^\circ$ ,  $m(\widehat{BAZ})=x$ ,  $m(\widehat{ZBA})=y$  ise  $x-y$  kaçtır?



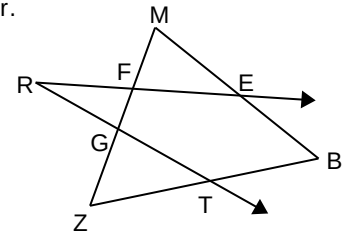
- 5) MTZ bir üçgendir. [MK] ve [TK] açıortayları K noktasında kesişiyor. Şekilde verilen açı ölçülerine göre  $m(\widehat{TKM})$  kaçtır?



- 3) MTZ bir dik üçgen, D [MZ] nın orta noktasıdır.  $m(\widehat{MTZ})=90^\circ$ ,  $|MD|=|TE|$ ,  $[MZ] \parallel [TE]$ ,  $m(\widehat{ZDE})=44^\circ$  ise  $m(\widehat{ZKE})$  kaç derecedir?



- 6) MBZ bir üçgendir.  $\widehat{MBZ} \cap (\widehat{TRE})$

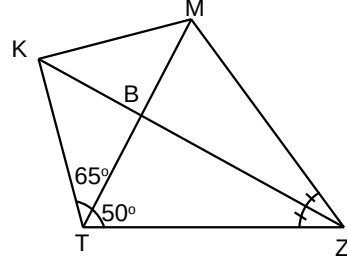


# ÜÇGENLER-1

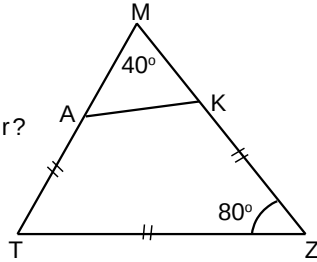
## ÜÇGENDE AÇILAR

### DEĞERLENDİRME - 2

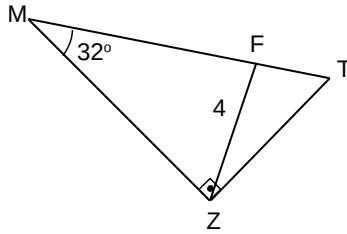
- 1) MTZ bir üçgendir.  $[KZ]$ ,  $MZT$  açısının açıortayıdır.  $m(\widehat{MTZ})=50^\circ$ ,  $m(\widehat{MTK})=65^\circ$  olduğuna göre  $m(\widehat{MKZ})$  kaç derecedir?



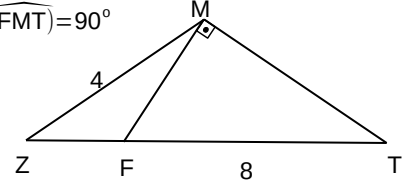
- 2) MTZ bir üçgendir.  $m(\widehat{M})=40^\circ$ ,  $m(\widehat{Z})=80^\circ$ ,  $|AT|=|TZ|=|ZK|$  ise  $m(\widehat{ZKA})$  kaç derecedir?



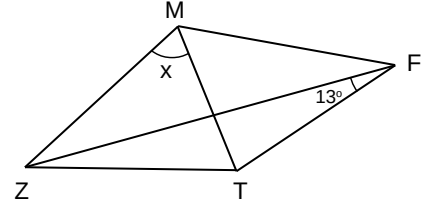
- 3) MTZ bir dik üçgendir,  $m(\widehat{TMZ})=32^\circ$ ,  $|ZF|=4br$ ,  $|MT|=8br$  ise  $m(\widehat{FZT})$  kaç derecedir?



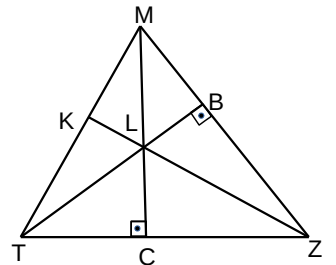
- 4) ZMT bir üçgen  $m(\widehat{FMT})=90^\circ$ ,  $m(\widehat{ZTM})=22^\circ$ ,  $|TF|=2$ ,  $|MZ|=8br$  ise  $m(\widehat{ZMF})$  kaç derecedir?



- 5)  $m(\widehat{ZFT})=13^\circ$ ,  $|MZ|=|MT|=|MF|$  ise  $m(\widehat{ZMT})=x$  kaç derecedir?



- 6) MTZ bir dik üçgen  $m(\widehat{TBZ})=m(\widehat{MCT})=90^\circ$ ,  $m(\widehat{MLK})=m(\widehat{TLK})$ ,  $m(\widehat{TMC})=24^\circ$  ise  $m(\widehat{BTZ})$  kaç derecedir?



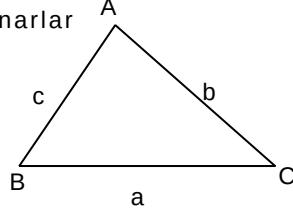
## ÜÇGENLER-2

### AÇI KENAR BAĞINTILARI

#### AÇI KENAR BAĞINTILARI

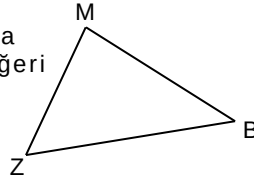
1. Bir üçgenin çizilebilmesi için kenarlar arasında

$|a-b| < c < a+b$   
 $|a-c| < b < a+c$   
 $|c-b| < a < c+b$   
bağıntıları geçerli olmalıdır



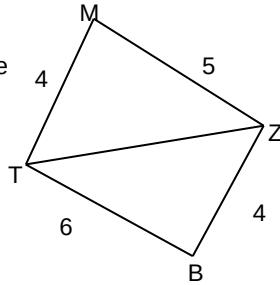
#### Örnek...1 :

MBZ bir üçgendir.  
 $|MB|=6br$ ,  $|MZ|=7br$  olduğuna göre  $|BZ|$  nin asal sayı değeri toplamı kaçtır?

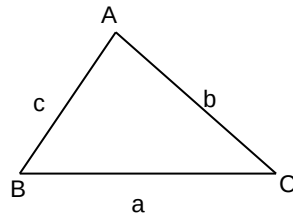


#### Örnek...2 :

MTBZ bir dörtgendir.  
Verilen uzunluklara göre TZ köşegeni kaç farklı tamsayı değer alır?



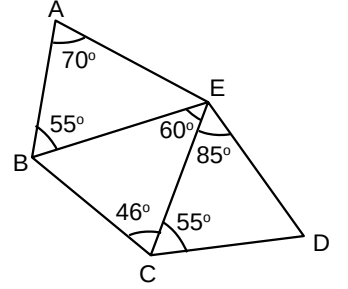
2. Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar bulunur. Bu önermenin tersi de doğrudur.



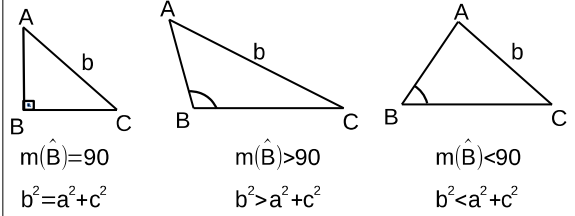
$$a < b < c \Leftrightarrow m(\widehat{A}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{C})$$

#### Örnek...3 :

ABC, BEC ve ECD birer üçgendir. Şekilde verilen açı ölçülerine göre en uzun kenar hangi kenardır?

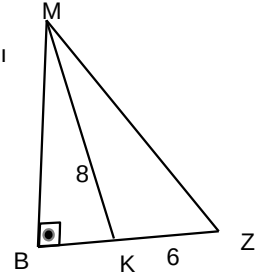


#### 3.



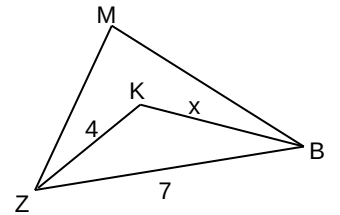
#### Örnek...4 :

MBZ bir dik üçgen  
 $|KZ|=6br$ ,  $|MK|=8br$  olduğuna göre  $|MZ|$  kaç farklı tamsayı değeri alır?



#### Örnek...5 :

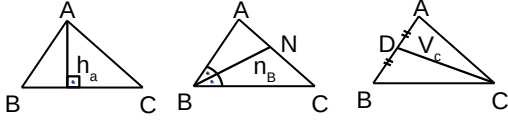
MBZ bir üçgendir.  
[ZK] ve [KB] açıortaydır,  $|KZ|=6br$ ,  $|BZ|=12br$  olduğuna göre x in alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?



## ÜÇGENLER-2

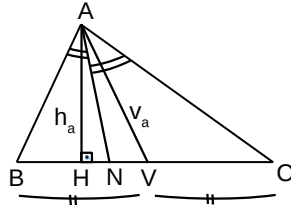
### AÇI KENAR BAĞINTILARI

4.



$$\begin{aligned} a < b < c \\ m(\widehat{A}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{C}) &\Leftrightarrow \begin{aligned} h_c < h_b < h_a \\ v_c < v_b < v_a \\ n_c < n_b < n_a \end{aligned} \end{aligned}$$

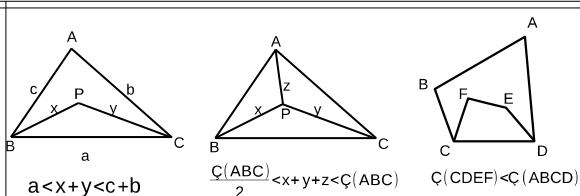
ABC çeşitkenar bir üçgensel bir köşede



$h_a < n_a < v_a$  sıralaması vardır.

### Örnek...6 :

Çeşitkenar bir üçgende  $h_a = n_b = v_c$  bağıntısı geçerliyse bu üçgende açı sıralaması nasıl olmalıdır?



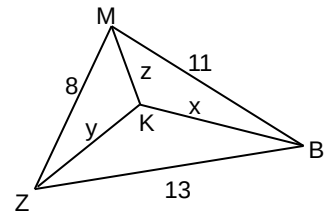
**Uyarı :** Ortadaki şekilde ABC de kenar uzunlukları arasında  $a > b > c$  ilişkisi varsa  $a + b > x + y + z > b + c$  olur

### Örnek...7 :

Çevresi 29 cm olan bir ABC üçgeninin içinde alınan bir noktanın üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı kaç tamsayı değeri olabilir?

### Örnek...8 :

MBZ bir üçgendir.  
 $|MZ|=8br$ ,  $|BZ|=13br$ ,  
 $|MB|=11br$  olduğuna göre  $x+y+z$  nin kaç farklı tamsayı değeri vardır?



### Üçgen Çizimleri

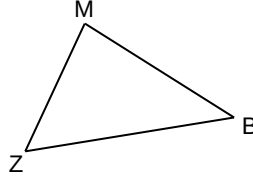
Bir üçgeni çizmek için, en az biri uzunluk olmak üzere, üç eleman verilmelidir. Verilen elemanlara göre, önce bir taslak üçgen çizilir; asıl üçgenin nasıl çizilebileceği, bu taslak üzerinde belirlenir. Çizim için pergeli, cetvel ve iletki kullanılır. Üçgenin çizilebilmesi için en az biri uzunluk ve iki açı bilinmelidir

## ÜÇGENLER-2

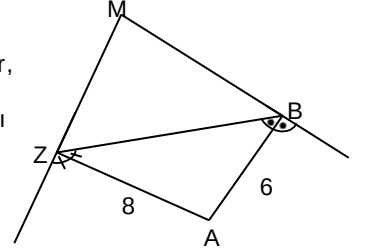
### AÇI KENAR BAĞINTILARI

#### DEĞERLENDİRME - 1

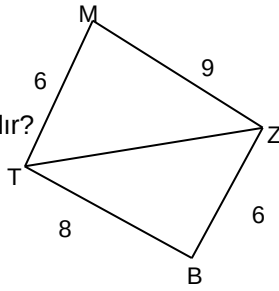
- 1) MBZ bir üçgendir.  
 $|MB|=2x+1br$ ,  
 $|MZ|=x-1br$   $|BZ|=7br$ ,  
olduğuna göre  $|BM|$  kaç  
farklı tam sayı değeri  
alır?



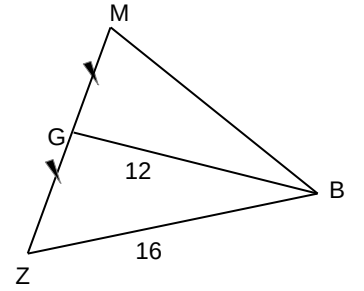
- 4) MBZ bir üçgendir.  
[ZA] ve [AB] açıortaydır,  
 $|AZ|=8br$ ,  $|AB|=6br$  ise  
 $|ZB|$  kaç farklı tamsayı  
değeri alır?



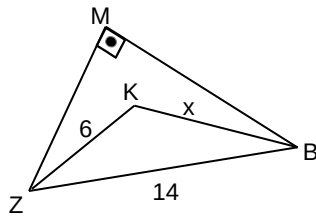
- 2) MTBZ bir dörtgendir.  
Verilen uzunluklara  
göre TZ köşegeni kaç  
farklı tamsayı değeri alır?



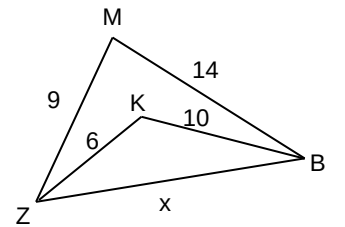
- 5) MBZ bir üçgendir.  
 $|BG|=12br$   
 $|ZB|=16br$  ve G  
noktası [ZM] nın orta  
noktası ise  $|BM|$  kaç  
farklı tamsayı değeri  
alır?



- 3) MBZ bir üçgendir.  
 $m(\widehat{BMZ})=90^\circ$ ,  
 $|KZ|=6br$ ,  
 $|BZ|=14br$   
olduğuna göre  
 $x=|KB|$  kaç farklı  
tamsayı olabilir?



- 6) MBZ bir üçgendir. ,  
 $|KZ|=6br$ ,  $|KB|=10br$ ,  
 $|ZM|=9br$ ,  $|MB|=14br$   
olduğuna göre x kaç  
farklı tamsayı olabilir?

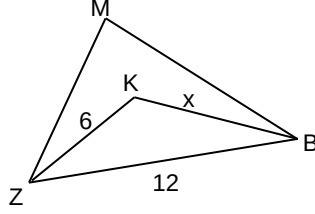


## ÜÇGENLER-2

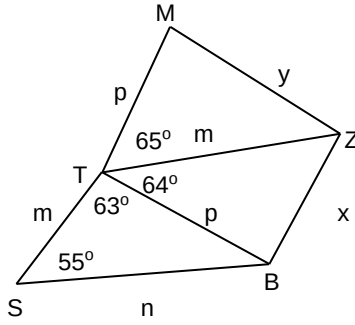
### AÇI KENAR BAĞINTILARI

#### DEĞERLENDİRME – 2

- 1) MBZ bir üçgendir.  
[ZK] ve [KB]  
açıortaydır,  
 $|KZ|=6br$ ,  
 $|BZ|=12br$   
olduğuna göre x  
kaç farklı tamsayı  
olabilir?

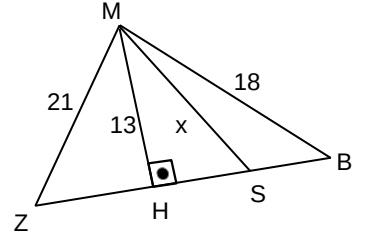


- 2) MTZ, TBZ,  
STB birer  
üçgendir.  
Şekilde verilen  
açı ve  
uzunluklara  
göre kenar  
uzunluklarını  
küçükten  
büyüğe  
sıralayınız.

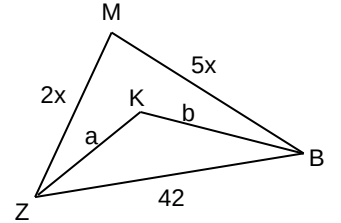


- 3) Kenar uzunlukları tamsayı olan çeşitkenar bir üçgenin çevresi 42 birimdir. Bu üçgende en büyük kenar uzunluğu kaç farklı değer alır?

- 4) MBZ bir üçgendir.  
[MH]⊥[ZB]  
 $|MH|=13br$ ,  
 $|ZM|=21br$ ,  
 $|MB|=18br$  ise  
 $|MS|=x$  kaç farklı  
tamsayı değeri  
alır ?



- 5) MBZ bir üçgendir. ,  
 $|KZ|=a$ ,  $|KB|=b$ ,  
 $|ZM|=2x$ ,  $|MB|=5x$   
olduğuna göre  
 $|MB|=5x$  Ç(KZB)  
tamsayı olarak en çok  
kaç olabilir?



- 6) Çeşitkenar bir üçgende  $V_a=h_b=n_c$  bağıntısı geçerliyse bu üçgende kenar sıralaması nasıl olmalıdır?

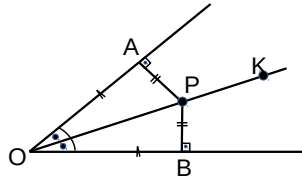
## ÜÇGENLER-3

### AÇIORTAY

#### AÇIORTAY

Bir açının ölçüsünü eş iki parçaya ayıran ışına açıortay denir.

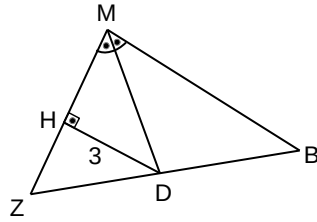
Şekilde [OK], AOB'nin açıortayıdır.



Açıortay üzerinde alınan noktanın açının kollarına uzaklığı eşittir.  
 $P \in [OK]$ ,  $|AP| = |BP|$  ve  $|OB| = |AO|$

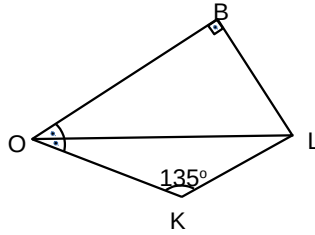
#### Örnek...1 :

MBZ bir üçgendir. [MD], M açısının açıortayı  $|HD|=3br$ ,  $|DB|=5br$  olduğuna göre  $|MB|-|MH|$  kaç birimdir?



#### Örnek...2 :

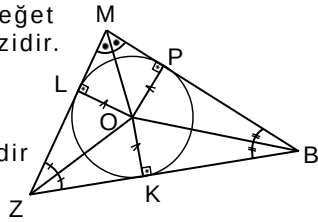
OBL dik üçgen  $|OB|=8br$ ,  $|OK|=5br$  ise  $|KL|$  kaç birimdir?



### ÜÇGENDE AÇIORTAY ÖZELLİKLERİ

1. Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

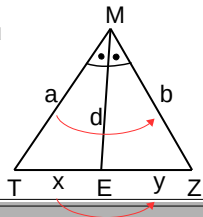
Şekilde O iç teğet çemberin merkezidir



#### 2. iç açıortay teoremi

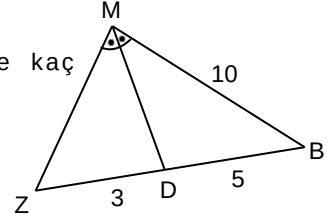
MTZ bir üçgen ve [ME] bu üçgenin açıortayı ise

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$



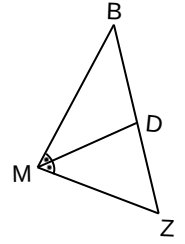
#### Örnek...3 :

MBZ bir üçgendir.  $|ZD|=3br$ ,  $|BD|=5br$ , ise kaç  $\angle(MBZ)$  kaç birimdir?



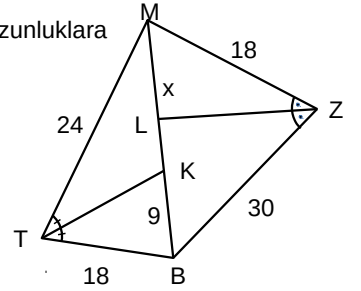
#### Örnek...4 :

MBZ bir üçgendir.  $|BZ|=3|BD|$ ,  $\angle(MBZ)=60br$  ise  $|MZ|+|ZD|$  kaç birimdir?

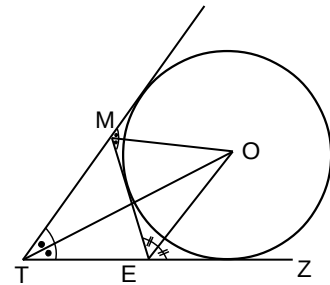


#### Örnek...5 :

MTBZ bir dörtgen, [TK] ve [ZL] açıortaylardır. Şekilde verilen uzunluklara göre  $|ML|$  kaç birimdir?



3. Üçgende iki dış açıortay ve diğer iç açının açıortayı bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir.



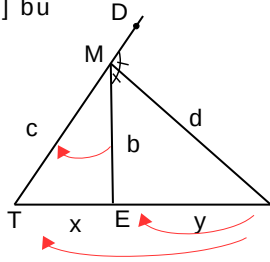
## ÜÇGENLER-3

### AÇIORTAY

#### 4. Dış açıortay teoremi

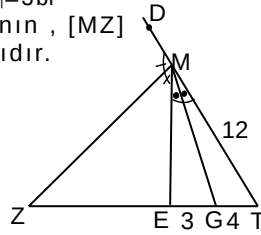
MTZ bir üçgen ve [ME] bu üçgenin açıortayı ise

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{y+x}$$



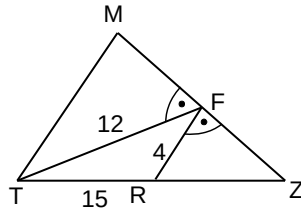
#### Örnek...6 :

MTZ üçgendir.  $|TG|=4br$ ,  $|EG|=3br$ ,  $|MT|=12br$ ,  $|MZ|=12br$ ,  $\angle MTE$  açısının  $\frac{1}{2}$ 'si  $\angle MZG$  açısının açıortayıdır. Buna göre  $|ZG|$  kaçtır?



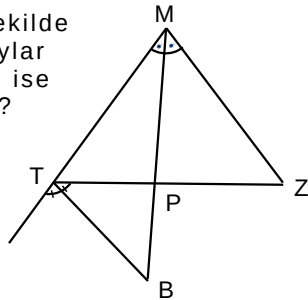
#### Örnek...7 :

MTZ bir üçgendir.  $m(\widehat{TFZ}) = m(\widehat{RFZ})$ . Şekilde  $|TF|=12br$ ,  $|TR|=15br$ ,  $|RF|=4br$  ise  $|RZ|$  kaç birimdir ?



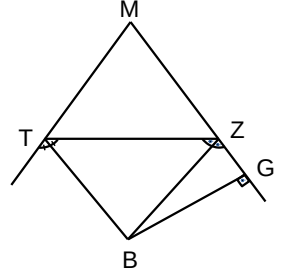
#### Örnek...8 :

MTZ bir üçgendir. Şekilde [MB] ve [TB] açıortaylar  $|MZ|=3 \cdot |ZP|$ ,  $|PM|=24br$  ise  $|MB|$  kaç birimdir ?



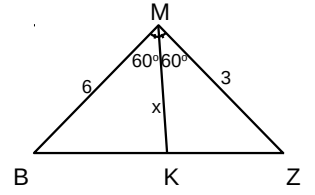
#### Örnek...9 :

MTZ bir üçgendir. Şekilde [MB] ve [ZB] açıortaylar  $|MT|=|MZ|+1=6br$ ,  $|ZG|=2br$  ise  $|ZT|$  kaç birimdir ?

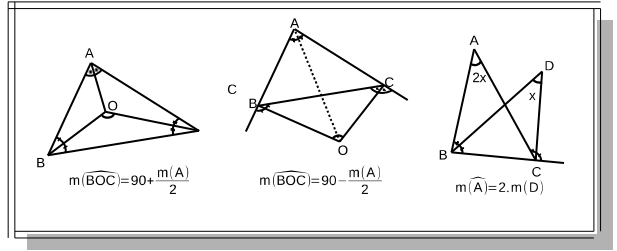


#### Örnek...10 :

MBZ bir üçgen  $m(\widehat{BMK}) = m(\widehat{KMZ}) = 60^\circ$   
1.  $|MZ|=|MB|=6br$  ise  $|MK|=x$  kaç birimdir?

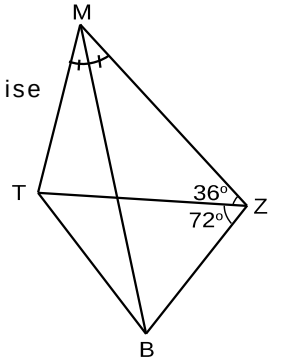


### HATIRLATMA



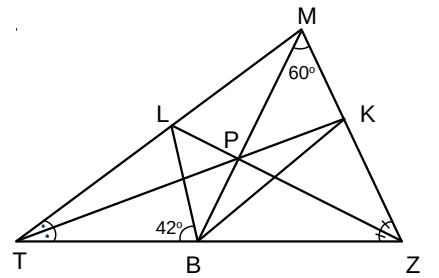
#### Örnek...11 :

Şekilde MTBZ dörtgen, [MB] açıortay,  $2m(\widehat{MZT}) = m(\widehat{TZB}) = 72^\circ$  ise  $m(\widehat{MBT})$  kaç derecedir?



#### Örnek...12 :

MTB üçgen, [TK], [LZ] açıortaylardır.  $[TK] \cap [MB] \cap [LZ] = \{P\}$   
 $m(\widehat{BMZ}) = 60^\circ$ ,  
 $m(\widehat{LBT}) = 42^\circ$  ise  $m(\widehat{MBK})$  kaç derecedir?

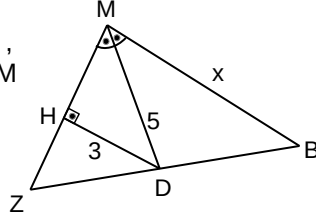


## ÜÇGENLER-3

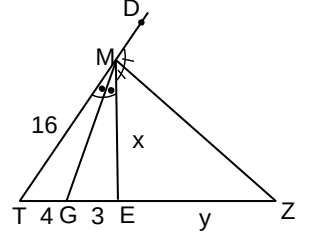
### AÇIORTAY

#### DEĞERLENDİRME – 1

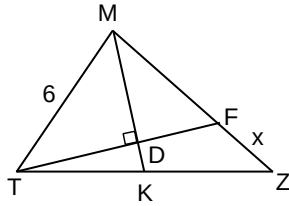
- 1) MBZ bir üçgendir.  
 $|HD|=3br$ ,  $|MD|=5br$ ,  
 $|DB|=3\sqrt{2}br$ ,  $[MD]$ , M  
açısının açıortayı  
olduğuna göre  
 $|MB|=x$  kaçtır?



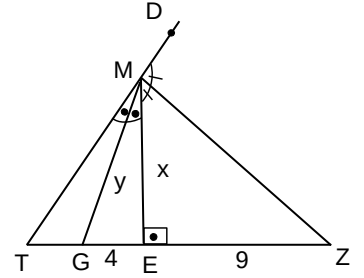
- 4) MTZ üçgendir.  
 $|TG|=4br$ ,  $|EG|=3br$   
 $|MT|=16br$ ,  $[MG]$ ,  $\widehat{MTE}$   
nın,  $[MZ]$ ,  $\widehat{EMD}$  nın  
açıortaylarıdır.  
Buna göre  $x+y$  kaçtır?



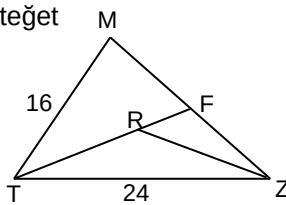
- 2) MTZ bir üçgen  
 $[TF] \perp [MK]$  dir.  
 $\frac{|TK|}{|KZ|} = \frac{3}{4}$ ,  
 $m(\widehat{KMZ}) = m(\widehat{TMK})$   
 $|MT|=6br$ ,  $|FZ|=x$   
kaç birimdir?



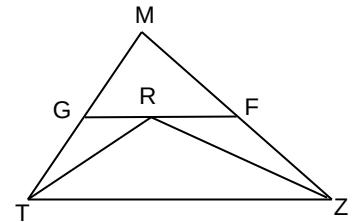
- 5) MTZ üçgendir.  
 $|EG|=4br$ ,  $|EZ|=9br$ ,  
 $[MG]$ ,  $\widehat{MTE}$  nın,  $[MZ]$ ,  
 $\widehat{EMD}$  nın açıortaylarıdır.  
Buna göre  $x.y$  kaçtır?



- 3) MTZ bir üçgen ve R içteğet  
çemberin merkezidir.  
 $|TM|=16cm$ ,  $|TZ|=24cm$   
ve  $4|TF|=5|TR|$   
olduğuna göre  $\widehat{C}(MTZ)$   
kaç cm dir?



- 6) MTZ bir üçgen ve R  
içteğet çemberin  
merkezidir.  $[TZ] \parallel [GF]$ ,  
 $|MT|=18br$ ,  $|ZM|=20br$   
ise MGF üçgeninin  
çevresi kaç birimdir?

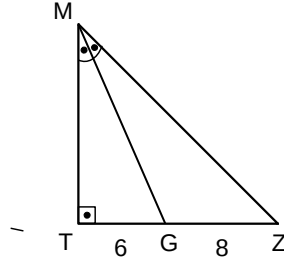


## ÜÇGENLER-3

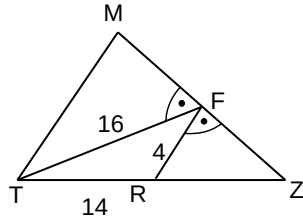
### AÇIORTAY

#### DEĞERLENDİRME – 2

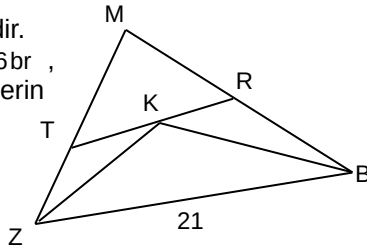
- 1) MTZ bir dik üçgendir.  
 $m(\widehat{TMG}) = m(\widehat{GMZ})$ ,  
 $|TG| = 6br$ ,  $|GZ| = 8br$   
 olduğuna göre  $|MG|$   
 kaç birimdir?



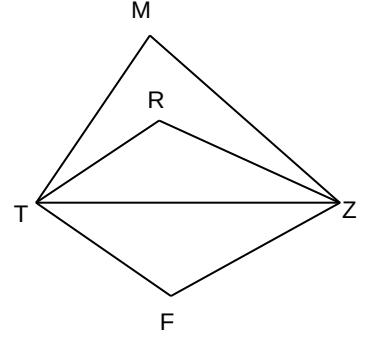
- 2) MTZ bir üçgendir.  
 Şekilde  
 $|TF| = 16br = 4 \cdot |RF|$ ,  
 $|TR| = 14br$  ise  
 $|RZ|$  kaç  
 birimdir ?



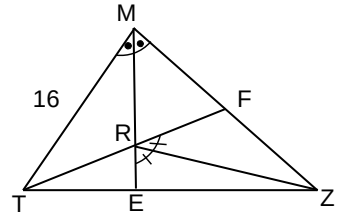
- 3) MBZ bir üçgendir.  
 $|TZ| = 8br$ ,  $|RB| = 6br$ ,  
 K iç teğet çemberin  
 merkezidir.  
 $TR \parallel BZ$  ve  
 $|ZB| = 21br$  ise  
 $\angle(MZB)$   
 kaçtır?



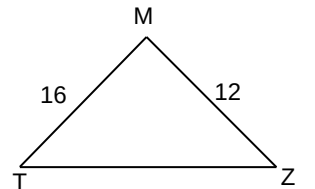
- 4) MTZ bir üçgen, R  
 içteğet çemberin ,F ise  
 dış teğet çemberin  
 merkezidir.  
 $m(\widehat{TMZ}) = 76^\circ$  ise  
 $m(\widehat{TRZ}) - m(\widehat{TFZ})$  kaç  
 derecedir?



- 5) MTZ bir üçgendir. ,  
 $m(\widehat{TME}) = m(\widehat{EMZ})$ ,  
 $m(\widehat{ZRF}) = m(\widehat{ZRE})$ ,  
 $|TM| = 16br$  ve  
 $|MZ| = 12br$  ise göre  
 $\frac{|TR|}{|ER|}$  kaçtır?



- 6) MTZ bir üçgen  
 $m(\widehat{ZMT}) = 2 \cdot m(\widehat{MZT})$  ise  
 $|ZT|$  kaç birimdir?

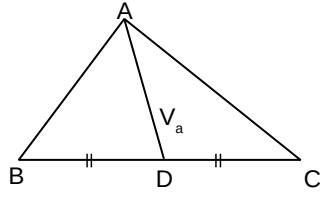


## ÜÇGENLER-4

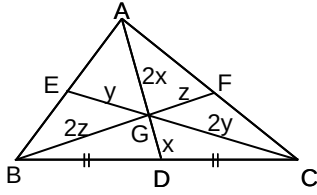
### KENARORTAY

#### KENARORTAY

Bir üçgende bir köşe ile karşı kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçasına kenarortay denir. a kenarına ait kenarortayı  $V_a$  ile gösteririz



Üçgende kenarortaylar bir noktada kesişir. Bu noktaya ağırlık merkezi denir ve genellikle G harfi ile gösterilir.

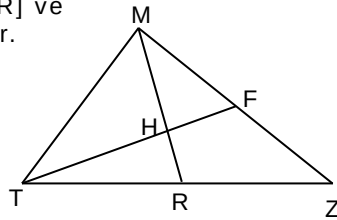


Ağırlık merkezi ,kenarortayı, köşeye iki , kenara bir birim olacak şekilde böler.

Bir köşeden karşı kenara çizilen doğru parçası, başka bir köşeden çizilen kenarortayı köşeden iki ve kenardan bir birim olacak şekilde bölüyorsa kenarortaydır

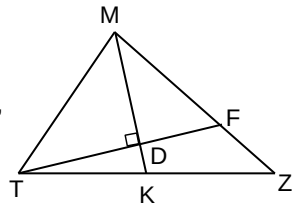
#### Örnek...1 :

MTZ bir üçgen, [MR] ve [TF] kenarortaylardır.  $[MR] \cap [TF] = [H]$ ,  $|MH|=14br$ ,  $|HF|=5br$ ,  $|MR|+|TF|$  kaçtır?



#### Örnek...2 :

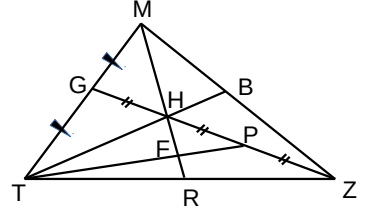
MTZ bir üçgen  $[TF] \perp [MK]$  dir. D ağırlık merkezi ve  $|MK|=12br$ ,  $|TF|=18$  ise,  $|MT|$  kaç birimdir?



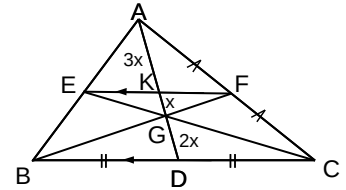
#### Örnek...3 :

MTZ bir üçgen  $|TG|=|GM|$ ,  $|GH|=|HP|=|PZ|$

olduğuna göre  $\frac{|HF|}{|MR|}$  oranı kaçtır?



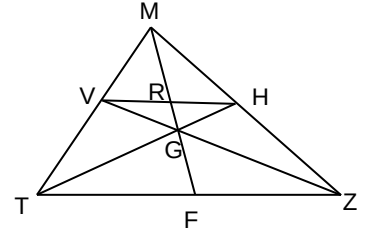
[BF] ve [CE] kenarortaylar ise  $[FE] \parallel [BC]$  ve  $2 \cdot |EF|=|BC|$  ( $[EF]$  orta tabandır)



Ayrıca kenarortayın parçaları arasında  $2 \cdot |AK|=6 \cdot |GK|=3 \cdot |DG|$  bağıntısı vardır.

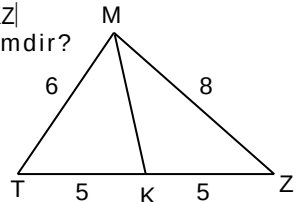
#### Örnek...4 :

MTZ üçgen, G ağırlık merkezidir.  $[VZ] \cap [TH] = [G]$  ve M,R,G,F doğrusal noktaldır.  $|MG|=24br$  Buna göre  $|MF|$  kaç birimdir?

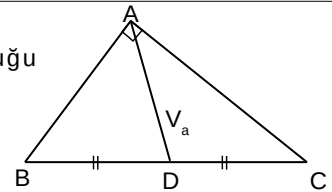


#### Örnek...5 :

MTZ üçgendir.  $|MT|=6br$ ,  $|MZ|=8br$ ,  $|TK|=|KZ|$  Buna göre  $|MK|$  kaç birimdir?



Hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısıdır.  $|AD|=|BD|=|DC|$



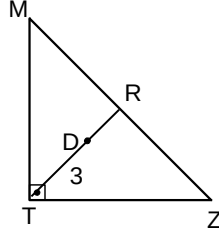
Ayrıca  $5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$  bağıntısı geçerlidir.

## ÜÇGENLER-4

### KENARORTAY

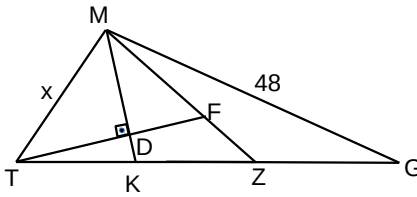
#### Örnek...6 :

MTZ bir üçgen D ağırlık merkezidir  
 $|TD|=3\text{cm}$ , ise  
 $V_z+V_m^2$  kaç  $\text{cm}^2$  dir?

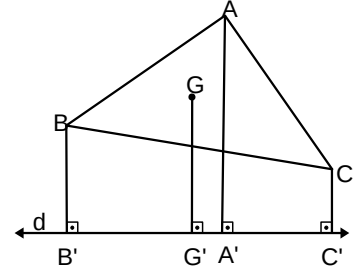


#### Örnek...7 :

MTG bir üçgen.  
 $[MK] \perp [TF]$ .  
 Şekilde D, MTZ üçgeninin ağırlık merkezi ve Z, [TG]'nin orta noktasıdır.  
 $|MG|=48\text{cm}$  ise x kaçtır?



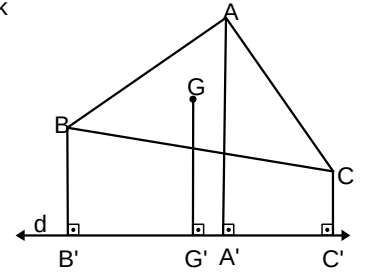
G ABC üçgeninin ağırlık merkezi ve  
 $[BB'] \perp d$   
 $[GG'] \perp d$   
 $[CC'] \perp d$



$$|AA'|+|BB'|+|CC'|=3 \cdot |G'G|$$

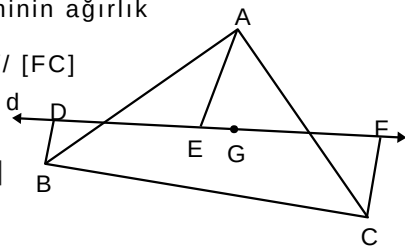
#### Örnek...9 :

ABC bir üçgen G ağırlık merkezidir  
 $|G'G|=12\text{cm}$ , ve  
 $6 \cdot |CC'|=2 \cdot |AA'|=3 \cdot |BB'|$   
 olduğuna göre [AB] nin orta noktasının d doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?



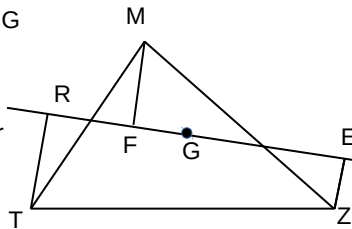
G ABC üçgeninin ağırlık merkezi ve  
 $[DB] \parallel [EA] \parallel [FC]$   
 ise

$$|AE|=|DB|+|CE|$$



#### Örnek...8 :

MTZ bir üçgendir, G ağırlık merkezidir.  
 $[TR] \parallel [EZ] \parallel [MF]$ .  
 $|MF|=x^2\text{br}$   
 $|EZ|=2x\text{br}$ ,  $|TR|=24\text{br}$   
 ise  $|EZ|$  kaç birimdir?

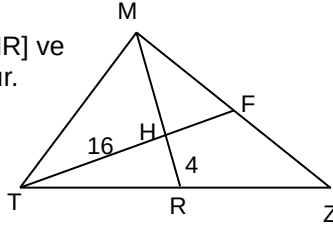


## ÜÇGENLER-4

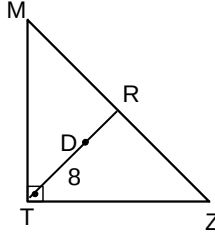
### KENARORTAY

#### DEĞERLENDİRME - 1

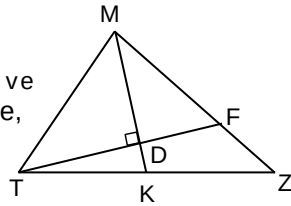
- 1) MTZ bir üçgen, [MR] ve [TF] kenarortaylardır.  
[MR]∩[TF]=[H],  
4. |HR|=|TH|=16 br,  
|MR|+|TF| kaçtır?



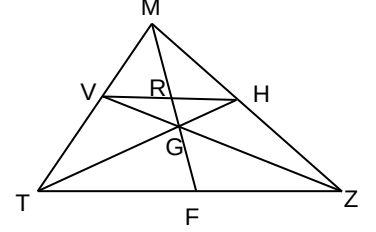
- 2) MTZ bir üçgen D ağırlık merkezidir  
|TD|=8cm, ise  
|MZ| kaç cm dir?



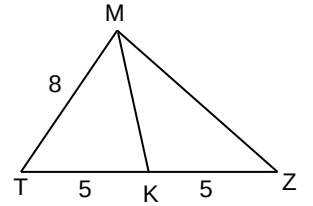
- 3) MTZ bir üçgen  
[TF]⊥[MK] dir.  
D ağırlık merkezi ve  
|TK|=6br, |MF|=8 ise,  
|MT| kaç birimdir?



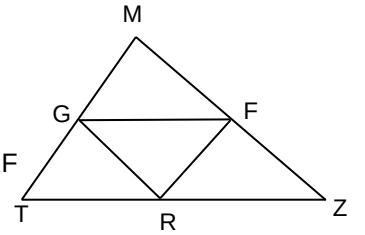
- 4) MTZ üçgen, G ağırlık merkezidir.  
[VZ]∩[TH]=[G] ve  
M,R,G,F doğrusal  
noktalardır.  
|FG|=12br  
Buna göre |MF| kaç  
birimdir?



- 5) MTZ üçgendir.  
|MT|=8br, |TK|=|KZ|  
Buna göre |MZ| kaç farklı  
tamsayı değeri alabilir?



- 6) MTZ bir üçgen, G,R,F  
üzerinde bulunduğu  
kenarların orta  
noktalarıdır.  
Ç(MTZ)=22 cm ise GRF  
üçgeninin çevresi kaç  
birimdir?

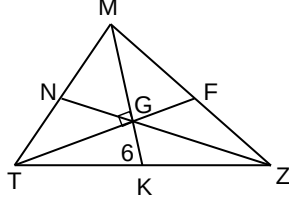


## ÜÇGENLER-4

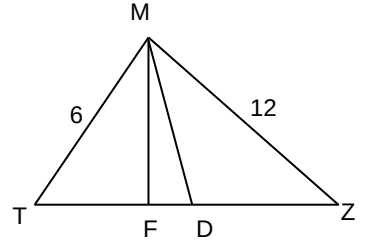
### KENARORTAY

#### DEĞERLENDİRME - 2

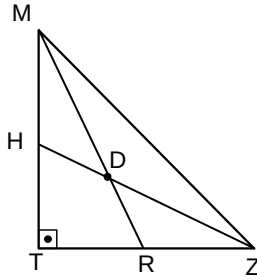
- 1) MTZ bir üçgen  
[TF]⊥[MK] dir.  
G ağırlık merkezi  
ve |FG|= $\frac{9}{2}$ br ve  
|KG|=6br ise,  
|GZ| kaç  
birimdir?



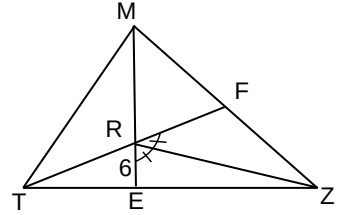
- 4) MTZ bir üçgen, D  
noktası [TZ] nın orta  
noktasıdır. [MF]⊥[TZ].  
2.|MT|=|MZ|=12br,  
|ZT|=15br ise |FD|  
kaç birimdir?



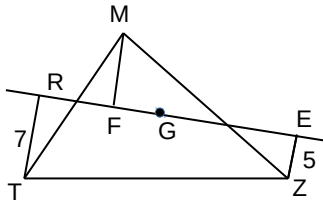
- 2) MTZ bir üçgen D  
ağırlık merkezidir.  
Şekilde |MR|=12br,  
|HZ|=9br ise |MZ|  
kaç birimdir ?



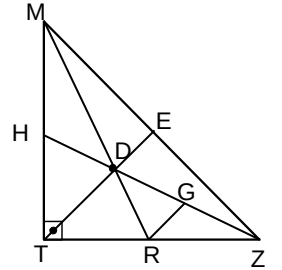
- 5) R, MTZ üçgeninin  
ağırlık merkezidir.  
 $m(\widehat{ZRF})=m(\widehat{ZRE})$   
|ER|=6br ise |TF| kaç  
birimdir?



- 3) MTZ bir üçgendir.  
|TR|=7br, |EZ|=5br,  
G ağırlık merkezidir.  
[TR] // [EZ] // [MF]  
ise |MF| kaçtır?



- 6) MTZ bir dik üçgen D  
ağırlık merkezidir.  
[RG] // [TE],  
[GR] // [ET].  
Şekilde |MZ|=24br,  
|RG| kaç birimdir ?



## ÜÇGENLER-5

### KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZİ

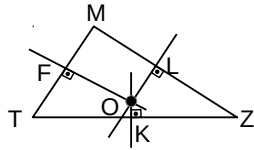
#### KENAR ORTA DİKME

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir.

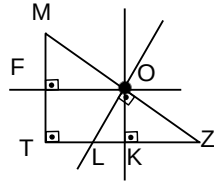
Bir üçgende kenar orta dikmeler bir noktada kesişir. Bu nokta çevrel çemberin merkezidir. Çevrel çemberin merkezi üçgenin açı çeşidine göre farklı bölgelere ait olabilir.

**Durum1** Dar açılı üçgende diklik merkezi üçgenin içindedir.

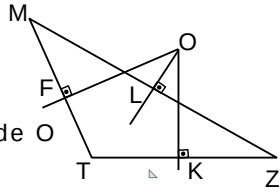
$[OF] \perp [MT]$ ,  
 $[OL] \perp [MZ]$ ,  
 $[OK] \perp [TZ]$ ,  
 $|MF|=|TF|$ ,  
 $|TK|=|KZ|$ ,  
 $|ZL|=|LM|$



**Durum 2** Dik açılı üçgende kenar orta dikmeler hipotenüs üzerinde kesişir



**Durum 3** Geniş açılı üçgende kenar orta



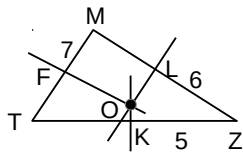
dikmelerin Şekillerde O noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır. (çevrel çemberin merkezidir) kesişim noktası üçgenin dış bölgesindedir.

Şekillerde O noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır. (çevrel çemberin merkezidir)

#### Örnek...1 :

Şekilde MTZ bir üçgen, O noktası kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır.

$|MF|=7$  br,  $|KZ|=5$  br,  
 $|LZ|=6$  birim olduğuna göre  $\angle(MTZ)$  kaç birimdir?

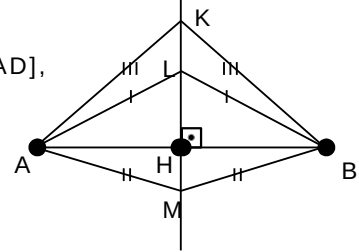


Uyarı

Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır ve bunun karşılığı da doğrudur.

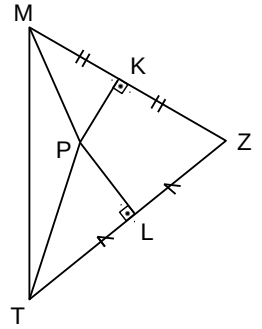
Şekilde  $KM \perp [AD]$ ,

$|LA|=|LB|$ ,  
 $|MA|=|MB|$ ,  
 $|KA|=|KB|$



#### Örnek...2 :

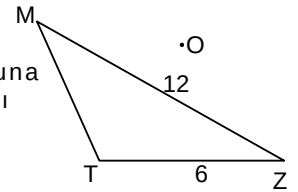
MTZ bir üçgen,  $[KP] \perp [MZ]$ ,  
 $[LP] \perp [TZ]$ ,  $m(\angle PTL)=34^\circ$ ,  
 $m(\angle PMK)=26^\circ$ , olduğuna göre  $m(\angle MPT)$  kaç derecedir?



#### Örnek...3 :

O noktası MTZ üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır.

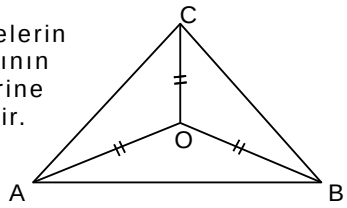
$|MZ|=12$  br,  $|TZ|=6$  br dir. Buna göre  $|MT|$  kaç farklı tamsayı değeri alır?



Uyarı

kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin köşelerine uzaklıkları eşittir.

Şekilde O noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktası,  $|AO|=|OB|=|OC|$  dir.



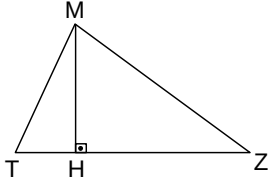
## ÜÇGENLER-5

### KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

#### YÜKSEKLİK

Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına dik olarak indirilen doğru parçasına o kenara ait yükseklik denir.

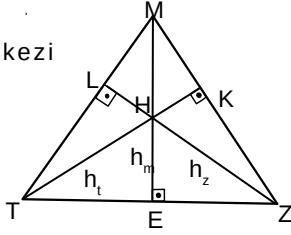
Şekilde  $[MH]$ ,  $[TZ]$  nin yüksekliğidir.



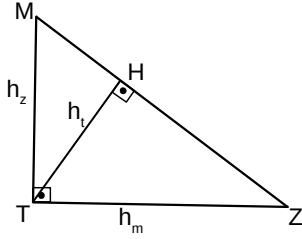
H noktasına dikme ayağı denir. Kenar m olarak gösterildiğinde  $|MH| = h_m$  ile gösterilir.

Bir üçgende yükseklikleri tek noktada kesişir. Bu nokta diklik merkezidir. Diklik merkezi üçgenin açı çeşidine göre farklı bölgelere ait olabilir.

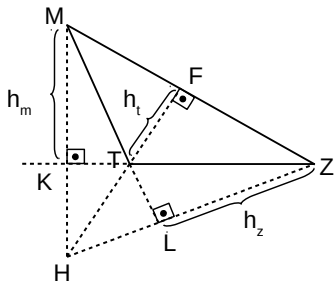
**Durum 1** Dar açılı üçgende diklik merkezi üçgenin içindedir.



**Durum 2** Dik açılı üçgende diklik merkezi üçgende dik kenarların birleştiği köşedir



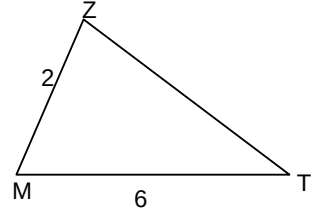
**Durum 2** Geniş açılı üçgende diklik merkezi üçgenin dış bölgesindedir.



Şekillerde H noktası diklik merkezidir

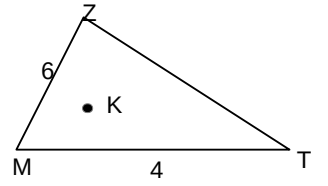
#### Örnek...4 :

Şekilde  $|ZM|=2$  br,  $|MT|=6$  br dir. Z noktası, MTZ üçgeninin diklik merkezi ise  $|ZT|$  kaç birimdir?



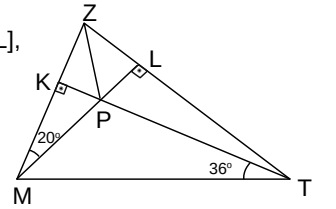
#### Örnek...5 :

Şekilde  $|ZM|=6$  br,  $|MT|=4$  br dir. K noktası, MTZ üçgeninin diklik merkezi ise  $|ZT|$  nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?



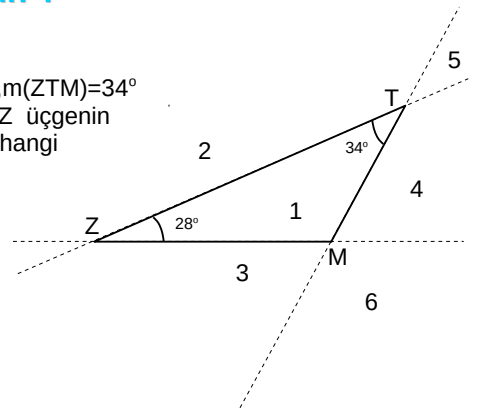
#### Örnek...6 :

Şekilde MTZ bir üçgen,  $[KT] \perp [ML]$ ,  $[KT] \cap [ML]=\{P\}$  dir. Buna göre  $m(\angle PZT)$  kaç derecedir?



#### Örnek...7 :

Şekilde ,  $m(\angle MZT)=28^\circ$  ,  $m(\angle ZTM)=34^\circ$  Buna göre MTZ üçgenin diklik merkezi hangi bölgededir?

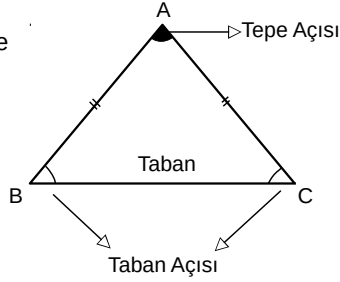


## ÜÇGENLER-5

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### İKİZKENAR ÜÇGEN

Herhangi iki kenarı birbirine eşit olan üçgendir.

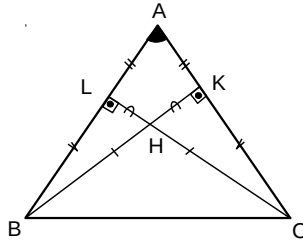


Taban açıları eşittir.  $m(\widehat{B})=m(\widehat{C})$

Eşit kenarlara ait yükseklikler, iç açıortaylar ve kenarortaylar eşittir  $h_b=h_c$ ,  $V_b=V_c$ ,  $n_B=n_C$

Yandaki ikizkenar üçgende  $|AB|=|AC|$  ve buradan eşlik kullanarak şu sonuçları çıkarabiliriz

$m(\widehat{ABK})=m(\widehat{ACL})$ ,  
 $|KC|=|BL|$ ,  $|LH|=|HK|$



### Örnek...8 :

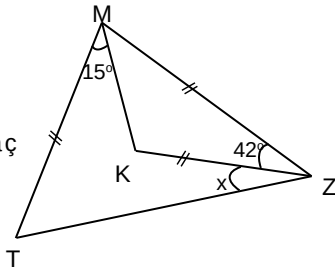
MTZ bir üçgendir.

$|TM|=|MZ|=|KZ|$ ,

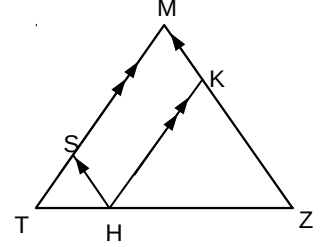
$m(\widehat{KZM})=42^\circ$

$m(\widehat{KMT})=15^\circ$

olduğuna göre x kaç derecedir?



$|MT|=|MZ|$ , H taban üzerinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \parallel [MZ]$ ,  $[HK] \parallel [MT]$  ise



$|HS|+|HK|=|MT|=|MZ|$  olur

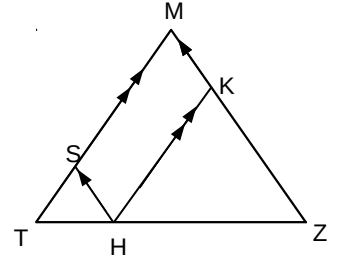
### Örnek...9 :

MTZ bir ikizkenar üçgen

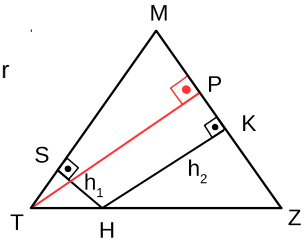
$|HS|+|HK|=13$ br ve

$|TH|+|HZ|=10$  br ise MTZ

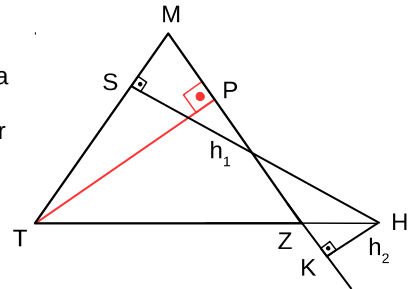
üçgeninin alanı kaç birim karedir?



$|MT|=|MZ|$ , H taban üzerinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$  ise  $h_1+h_2=h_1=h_2$  olur



$|MT|=|MZ|$ , H taban uzantısında alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$  ise



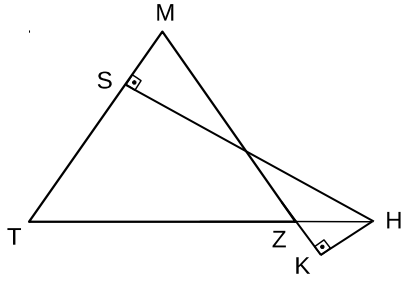
$|MS|-|MK|=h_1-h_2=h_1=h_2$  olur

## ÜÇGENLER-5

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

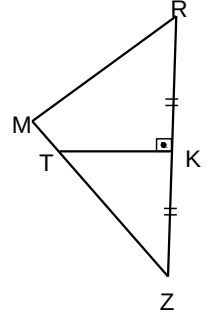
### Örnek...10 :

Yandaki MTZ  
üçgeninde  
 $[HS] \perp [MT]$   
 $[HK] \perp [MK]$   
 $|HK|=2br$   
 $|HS|=8br$ ,  
 $m(\widehat{MZT})=67,5^\circ$   
olduğuna göre  
 $|MT|=|MZ|$  kaç  
birimdir?

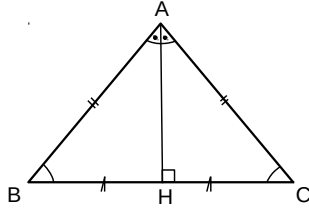


### Örnek...11 :

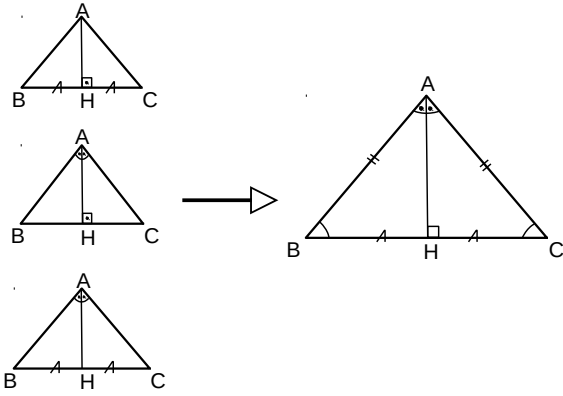
MRZ bir üçgen  $|MR|=|TZ|$   
 $m(\widehat{RKT})=90^\circ$  ve  
 $m(\widehat{MRK})=63^\circ$  ise  $m(\widehat{M})$  kaç  
derecedir?



$|AB|=|AC|$  ise A  
köşesinden  
indirilen dikme  
aynı zamanda  
açıortay ve  
kenarortaydır.

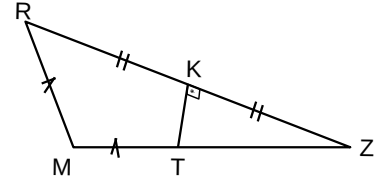


Bir köşeye ait yükseklik, açıortay veya  
kenarortaydan herhangi ikisi aynı ise  
üçgen en azından ikizkenardır



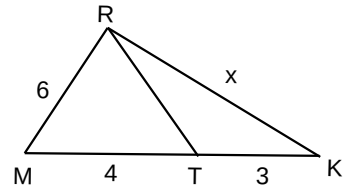
### Örnek...12 :

MRZ bir üçgen  
 $|MR|=|MT|$ ,  $|RK|=|KZ|$ ,  
 $m(\widehat{TKZ})=90^\circ$ ,  
 $m(\widehat{RMZ})=120^\circ$  ve  
 $|TZ|=20br$  ise  
A(TKZ) kaç birim  
karedir?



### Örnek...13 :

KMR bir üçgen  
 $|MR|=|RT|=6br$ ,  $|MT|=4br$ ,  
 $|KT|=3br$  ise x kaç  
birimdir?

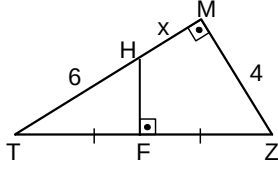


## ÜÇGENLER-5

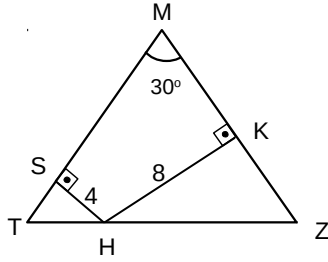
KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### DEĞERLENDİRME - 1

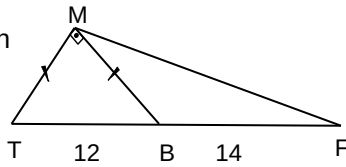
- 1)  $\triangle TMZ$ ,  $\triangle HFT$  birer dik üçgendir.  $|HT|=6br$ ,  $|FT|=|FZ|$ ,  $|MZ|=4br$ ,  $|HM|$  kaç birimdir?



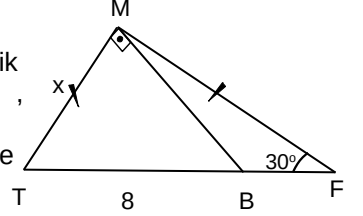
- 2)  $\triangle MTZ$  bir üçgen ikizkenar üçgen,  $[SH] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$ ,  $2 \cdot |SH| = |HK| = 8cm$ , ise  $|MT|$  kaç cm dir?



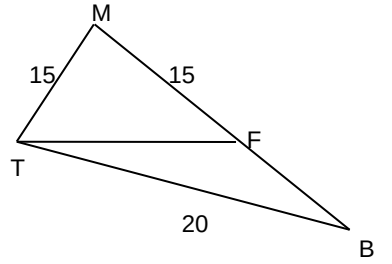
- 3)  $\triangle TMB$  bir dik üçgen  $|MT|=|MB|$  dir.  $|TB|=12br$ ,  $|BF|=14br$  ise,  $|MF|$  kaç birimdir?



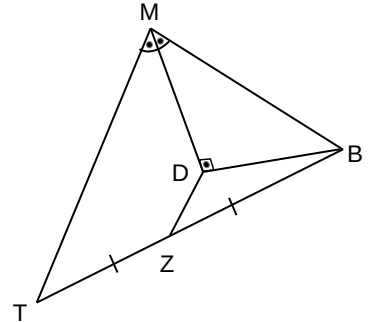
- 4)  $\triangle MTF$  ikizkenar,  $\triangle TMB$  dik üçgendir.  $[TM] \perp [MB]$ ,  $|TM|=|MF|$ ,  $|TB|=8br$  olduğuna göre  $|MT|=x$  kaç birimdir?



- 5)  $\triangle MTB$  bir üçgendir.  $F \in [MB]$ ,  $|MT|=|FM|=15br$ ,  $m(\widehat{TMF}) = 2 \cdot m(\widehat{FTB})$ ,  $|TB|=20br$ . Buna göre  $|FB|$  kaç birimdir?



- 6)  $\triangle MTB$  bir üçgen,  $[MD] \perp [DB]$ ,  $|ZB|=|TZ|$ ,  $[MD]$  açıortay,  $2 \cdot |MT|=3 \cdot |MB|=48cm$  ise  $|DZ|$  kaç birimdir?

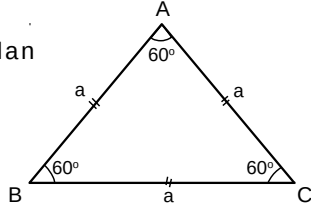


## ÜÇGENLER-5

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### EŞKENAR ÜÇGEN

Üç kenar uzunluğu eşit olan üçgendir.



$$m(\widehat{A})=m(\widehat{B})=m(\widehat{C})=60^\circ$$

Yükseklikler, iç açıortaylar ve kenarortaylar eşitir

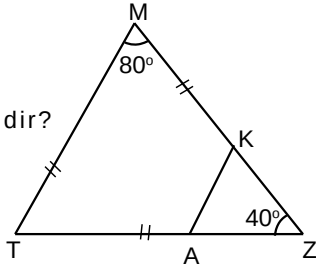
$$h_a=h_b=h_c=V_a=V_b=V_c=n_A=n_B=n_C=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ç}(ABC)=3a$$

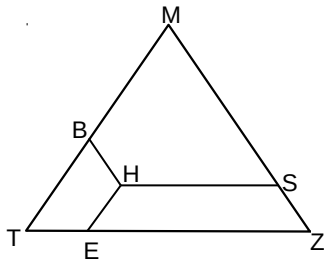
$$A(ABC)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

### Örnek...1 :

MTZ bir üçgen,  
 $m(\widehat{M})=2.m(\widehat{Z})=80^\circ$ ,  
 $|MT|=|MK|=|AT|$  ise  
 $m(\widehat{KAZ})$  kaç derecedir?



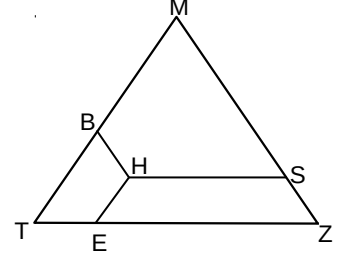
MTZ eşkenar üçgen, H üçgenin iç bölgesinde alınan rastgele bir nokta ve ve  $[HS] \parallel [TZ]$ ,  $[HB] \parallel [MZ]$ ,  $[HE] \parallel [MT]$  ise



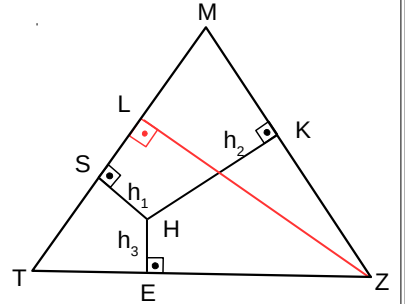
$$|HS|+|HE|+|HB|=|MT| \text{ olur}$$

### Örnek...2 :

MTZ bir ikizkenar üçgen  
 $|HS|+|HE|+|HB|=12$   
 br ise MTZ üçgeninin alanı kaç birim karedir?

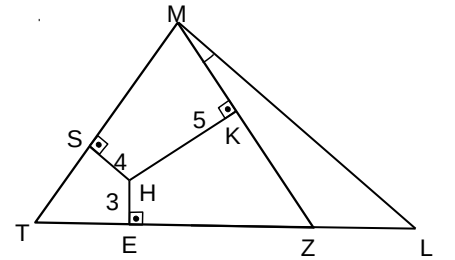


MTZ eşkenar üçgen, H üçgenin iç bölgesinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$ ,  $[HE] \perp [TZ]$  ise  $h_1+h_2+h_3=h_2$  olur



### Örnek...3 :

MTZ eşkenar üçgen, H üçgenin iç bölgesinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$ ,  $[HE] \perp [TZ]$  dir.  $m(\widehat{ZML})=15^\circ$  ise  $|ML|$  kaç birimdir?



## ÜÇGENLER-5

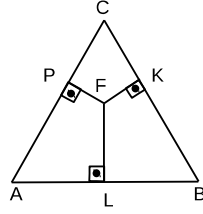
KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### DEĞERLENDİRME – 2

- 1) ABC bir eşkenar üçgen

$[FP] \perp [AC]$ ,  $[FK] \perp [BC]$ ,  
 $[FL] \perp [AB]$  dir.

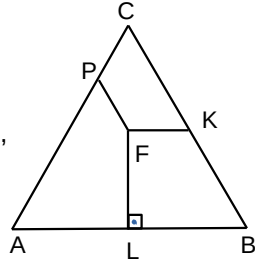
$|FP| + 3\sqrt{3} = |FK| + 2\sqrt{3} = |FL| = 7\sqrt{3}$  br  
ise, ABC üçgeninin bir kenarı  
kaç birimdir?



- 2) ABC bir eşkenar üçgen

$[FP] \parallel [BC]$ ,  $[FK] \parallel [AB]$

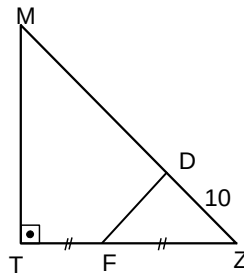
,  $[FL] \perp [AB]$  dir  $|FP| = 5$  br  
 $|FK| = 6$  br  $|FL| = 4\sqrt{3}$  br ise,  
ABC üçgeninin çevresi  
kaç birimdir?



- 3) MTZ bir dik üçgen FDZ

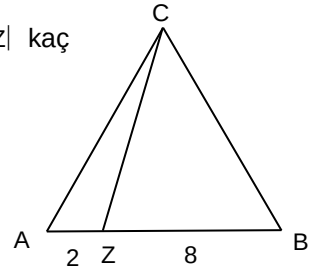
bir eşkenar üçgendir.

$|TF| = |FZ|$  ve  $|ZD| = 10$  br,  
A(MTFD) kaç birim  
karedir?



- 4) ABC bir eşkenar üçgen,

4.  $|AZ| = |ZB| = 8$  br, ise  $|CZ|$  kaç  
birimdir?

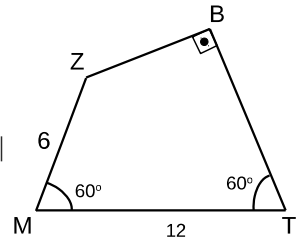


- 5) MTBZ bir dörtgendir.

$m(\hat{B}) = 90^\circ$ ,

$m(\hat{M}) = m(\hat{T}) = 60^\circ$

2.  $|MZ| = |MT| = 12$  br ise  $|TB|$   
kaç birimdir?

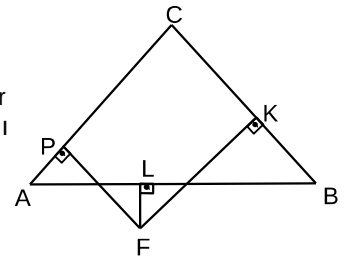


- 6) ABC bir eşkenar üçgen

$[FP] \perp [AC]$ ,  $[FK] \perp [BC]$ ,

$[FL] \perp [AB]$  dir.

$|FP| + |FK| = 6\sqrt{3}$ ,  $|FL| = 2\sqrt{3}$  br  
ise, ABC üçgeninin alanı  
kaç birim karedir?



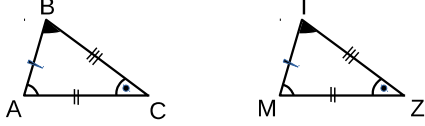
## ÜÇGENLER-6

### EŞLİK

#### EŞLİK

ABC ve MTZ üçgenleri arasında bire bir eşleme kurulduğunda; karşılıklı kenarlar ve karşılıklı açılar eş ise ABC ve MTZ üçgenleri eştir denir.

$\triangle ABC \equiv \triangle MTZ$  ile bu eşlik gösterilir.



$$\triangle ABC \equiv \triangle MTZ \iff \begin{cases} |AC|=|MZ| & m(\hat{A})=m(\hat{M}) \\ |AB|=|MT| & m(\hat{B})=m(\hat{T}) \\ |BC|=|TZ| & m(\hat{C})=m(\hat{Z}) \end{cases}$$

#### Örnek...1 :

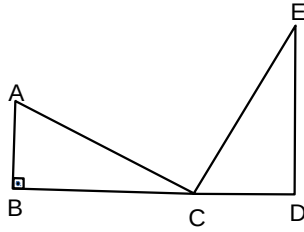
B, C, D doğrusal noktalardır.

$$m(\hat{B})=90^\circ$$

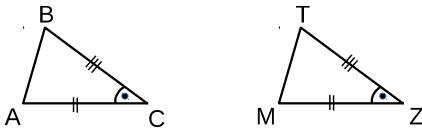
$$|CD|=3br, |BC|=4br$$

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDE \text{ ise}$$

$|AE|$  kaç birimdir?



#### 2. Kenar - açı - kenar eşlik teoremi



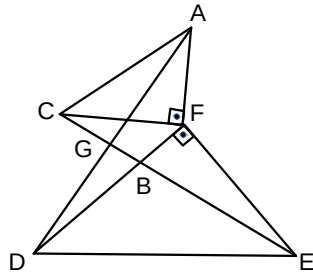
$$\left. \begin{array}{l} m(\hat{C})=m(\hat{Z}) \\ |AC|=|MZ| \\ |BC|=|TZ| \end{array} \right\} \implies \triangle ABC \equiv \triangle MTZ$$

#### Örnek...2 :

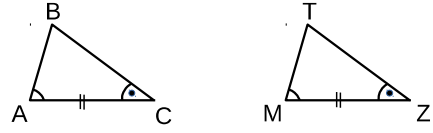
AFC ve DFE ikizkenar dik üçgenlerdir.

$$m(\hat{CFA})=m(\hat{DFE})=90^\circ$$

ise  $m(\hat{CGD})$  kaç birimdir?



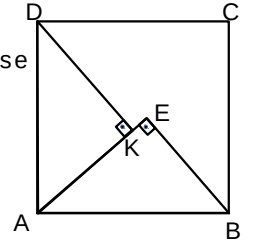
#### 1. Açı - kenar- açı eşlik teoremi



$$\left. \begin{array}{l} m(\hat{A})=m(\hat{M}) \\ m(\hat{C})=m(\hat{Z}) \\ |AC|=|MZ| \end{array} \right\} \implies \triangle ABC \equiv \triangle MTZ$$

#### Örnek...3 :

ABCD kare, AEB ve AKD dik üçgenlerdir.  $|KE|=2br, |AK|=6br$  ise  $\square(ABCD)$  kaç birimdir?

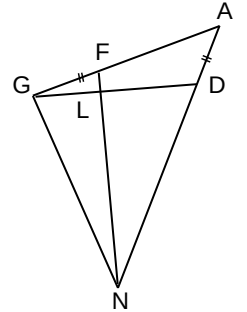


#### Örnek...4 :

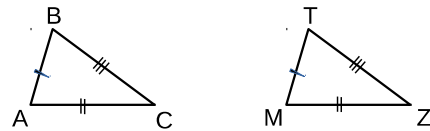
AGN eşkenar üçgendir.

$$|AD|=|GF| \text{ ve } m(\hat{AGD})=19^\circ \text{ ise}$$

$m(\hat{FND})$  kaç derecedir?



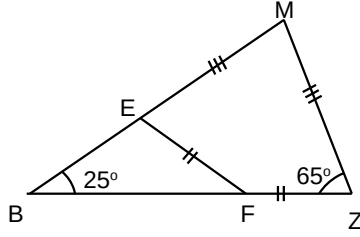
#### 3. Kenar - kenar- kenar eşlik teoremi



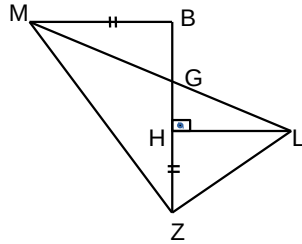
$$\left. \begin{array}{l} |AC|=|MZ| \\ |AB|=|MT| \\ |BC|=|TZ| \end{array} \right\} \implies \triangle ABC \equiv \triangle MTZ$$

DEĞERLENDİRME

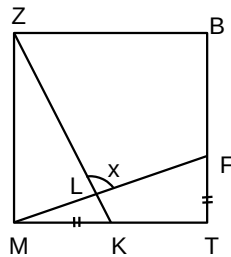
- 1) MBZ bir üçgendir.  
 $|EF|=|FZ|$ ,  
 $|EM|=|MZ|$   
 olduğuna göre  
 $m(\widehat{EFZ})$  kaç  
 derecedir?



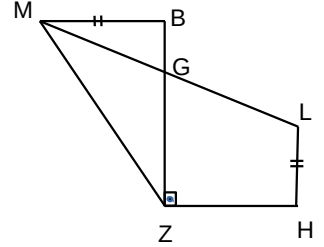
- 2) MBZ bir üçgendir.  
 $[MB] \parallel [HL]$   
 $|MB|=|HZ|$ ,  
 $|ZB|=|HL|$ ,  
 $m(\widehat{HZL})=64^\circ$  ise  
 $m(\widehat{HLG})$  kaç  
 derecedir?



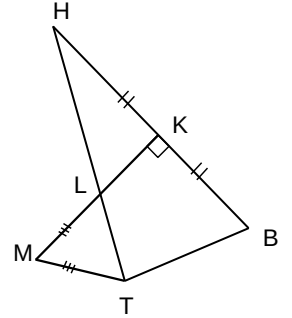
- 3) MTBZ bir karedir.  
 $|MK|=|FT|$ , olduğuna  
 göre  $m(\widehat{ZLF})=x$  kaç  
 derecedir?



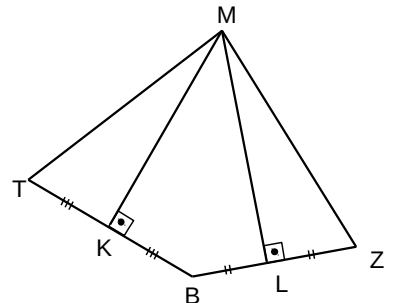
- 4) MBZ bir üçgendir.  
 $m(\widehat{BZH})=90^\circ$   
 $|MB|=|LH|$ ,  
 $|ZB|=|HZ|$ ,  
 $[MB] \parallel [HZ]$ ,  
 $[ZB] \parallel [HL]$  ise  
 $m(\widehat{LMZ})$  kaç  
 derecedir?



- 5) MTBK bir dörtgendir.  
 $m(\widehat{MTB})=134^\circ$ ,  $|KB|=|HK|$ ,  
 $|ML|=|MT|$ ,  $|HL|=|TB|$ ,  
 $[MK] \perp [HB]$  olduğuna göre  
 $m(\widehat{THK})$  kaç derecedir?



- 6) MTBZ bir dörtgendir.  
 $|KT|=|KB|$ ,  $|BL|=|LZ|$   
 $m(\widehat{TMZ})=138^\circ$   
 olduğuna  $m(\widehat{TBZ})$   
 kaç derecedir?



## ÜÇGENLER-7

### BENZERLİK

#### BENZERLİK

Bir şekli belirli oranlarda büyüterek veya küçülterek benzerleri elde edilebilir.

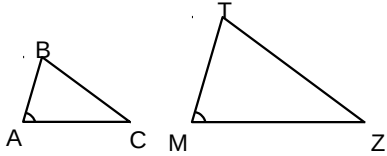
Buradaki belirli orana Benzerlik Oranı denir.



İki doğru parçası, iki eşkenar üçgen, iki kare, iki çember, iki küp, iki küre... gibi şekil ve cisimlerin uzunlukları arasında daima bir oran vardır. Bu nedenle bunların her zaman birbirine benzer olduklarını söyleyebiliriz.

#### ÜÇGENLERİN BENZERLİĞİ

ABC ve MTZ üçgenleri arasında bire bir eşleme kurulduğunda; birinin kenarları diğerinin kenarlarının "k" katı ise, ABC ve MTZ üçgenleri benzerdir denir ve bu benzerlik  $\triangle ABC \sim \triangle MTZ$  biçiminde gösterilir. ( $k \in \mathbb{R}$ )



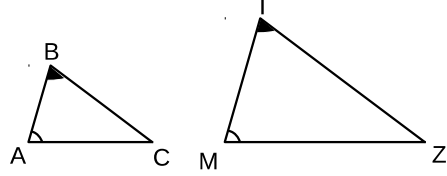
$$\triangle ABC \sim \triangle MTZ \iff \begin{cases} m(\hat{A})=m(\hat{M}) \\ m(\hat{B})=m(\hat{T}) \\ m(\hat{C})=m(\hat{Z}) \end{cases} \text{ ve } \frac{a}{m} = \frac{b}{t} = \frac{c}{z} = k$$

Ayrıca, iki üçgenin benzerlik oranı olarak,

- 1) Karşılıklı kenarlar oranı,
- 2) Karşılıklı kenarortaylar oranı,
- 3) Karşılıklı açıortaylar oranı,
- 4) Karşılıklı yükseklikler oranı,
- 5) Karşılıklı iç teğet çember yarıçapları oranı,
- 6) Karşılıklı dış teğet çember yarıçapları oranı,
- 7) Karşılıklı çevrel çember yarıçapları oranı,
- 8) Karşılıklı çevre uzunlukları oranı da alınabilir

#### BENZERLİK TEOREMLERİ

##### 1. Açı - açı benzerliği

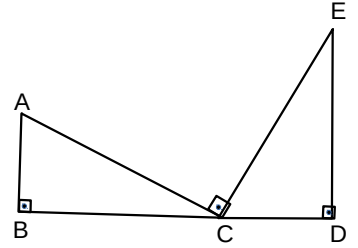


$$\left. \begin{matrix} m(\hat{A})=m(\hat{M}) \\ m(\hat{B})=m(\hat{T}) \end{matrix} \right\} \implies \triangle ABC \sim \triangle MTZ$$

##### Örnek...1 :

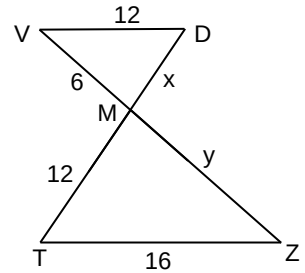
B,C,D doğrusal noktaldır.

$m(\hat{B})=m(\hat{D})=m(\hat{CDE})=90^\circ$   
6.  $|CD|=4$ ,  $|AB|=3$ ,  $|ED|=12$  br  
 $|AC|$  kaç birimdir?



##### Örnek...2 :

V,M,Z doğrusal noktaldır. T,M,D doğrusal noktaldır.  $[VD] \parallel [TZ]$  dir. Verilen uzunluklara göre  $x+y$  kaçtır?



## ÜÇGENLER-7

### BENZERLİK

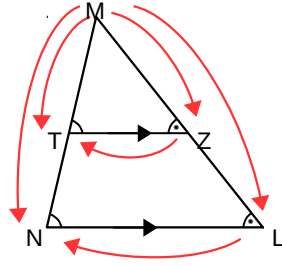
#### TEMEL ORANTI TEOREMİ

Bir üçgenin bir kenarına paralel olan bir doğru üçgenin diğer kenarlarını farklı noktalarda keserse, bu doğru kenarlar üzerinde orantılı parçalar ayırır

$TZ \parallel NL$  ise  
 $MTZ \sim MNL$

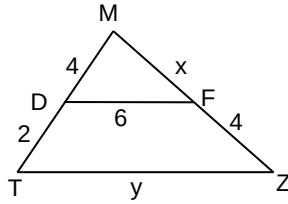
$$\frac{|MT|}{|MN|} = \frac{|MZ|}{|ML|} = \frac{|TZ|}{|NL|}$$

$$\frac{|MT|}{|TN|} = \frac{|MZ|}{|ZL|}$$

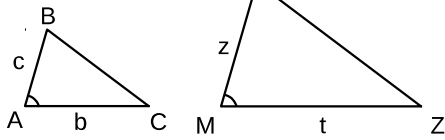


#### Örnek...3 :

MTZ bir üçgendir.  
[DF] // [TZ] dir.  
Verilen uzunluklara göre x+y kaçtır?



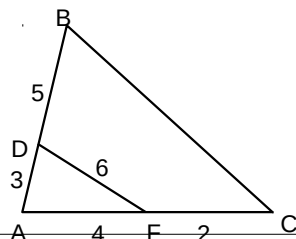
#### 2. Kenar - açı - kenar benzerlik teoremi



$$\left. \begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{M}) \\ \frac{c}{z} = \frac{b}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MTZ$$

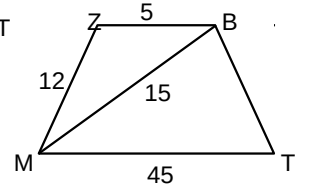
#### Örnek...4 :

ABC ve ADF birer üçgendir. Verilen uzunluklara göre |BC| kaçtır?

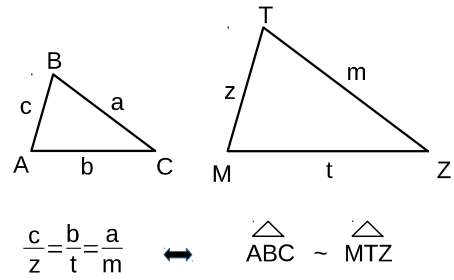


#### Örnek...5 :

MTBZ dörtgeninde  $BZ \parallel MT$   
Verilen uzunluklara göre  
|BT| kaç birimdir?



#### 3. Kenar - kenar - kenar benzerlik teoremi



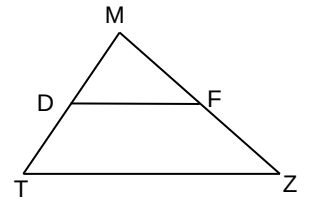
Benzer iki şekilde karşılıklı uzunlukların oranı benzerlik oranına eşittir

Benzer iki şeklin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşittir

Benzer iki şeklin hacimlerinin oranı benzerlik oranının küpüne eşittir

#### Örnek...6 :

MTZ bir üçgendir.  
[DF] // [TZ] dir.  
3. |MD|=2. |DT| .  
 $A(ABC) = 250 \text{ br}^2$  ise  
 $A(MDF)$  kaç birim karedir?



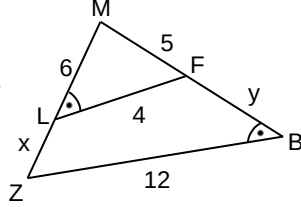
**Pantograf**, verilen bir Şeklin daha büyüğünü daha küçüğünü ya da eşini çizmeye yarayan mekanik bir alettir.

## ÜÇGENLER-7

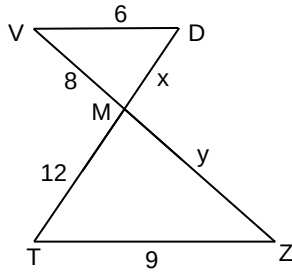
### BENZERLİK

#### DEĞERLENDİRME - 1

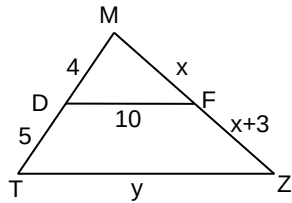
- 1) MBZ bir üçgendir.  
 $|ML|=6br$ ,  $|MZ|=5br$ ,  
 $|LF|=4br$ ,  $|ZB|=12br$ ,  
 $m(\widehat{L})=m(\widehat{B})$  olduğuna  
göre  $x+y$  kaçtır?



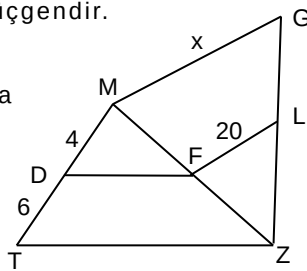
- 2) V,M,Z doğrusal noktalardır. T,M,D doğrusal noktalardır.  $[VD] \parallel [TZ]$  dir. Verilen uzunluklara göre  $x+y$  kaçtır?



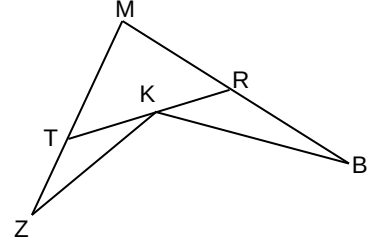
- 3) MTZ bir üçgendir.  $[FD] \parallel [TZ]$  dir. Verilen uzunluklara göre  $x+y$  kaçtır?



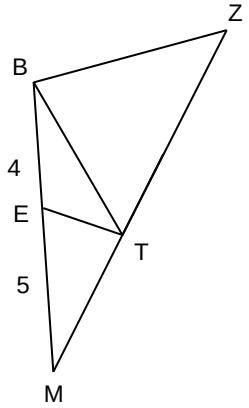
- 4) MTZ ve MZG birer üçgendir.  $[FD] \parallel [TZ]$ ,  $[LF] \parallel [MG]$  dir. Verilen uzunluklara göre  $x$  kaçtır?



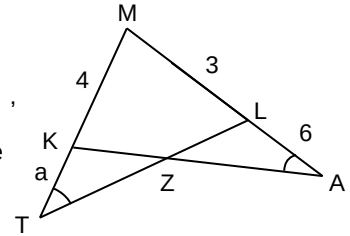
- 5) MTR bir üçgendir.  
 $KBR \sim ZKT$   
 $m(\widehat{RBK})=43^\circ$ ,  
 $m(\widehat{ZKB})=100^\circ$  ise  
 $m(\widehat{M})$  kaç derecedir?



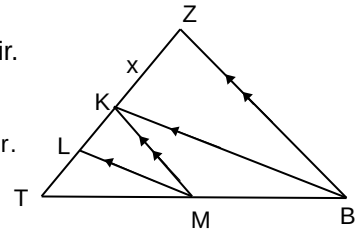
- 6) TBZ bir eşkenar üçgendir.  $m(\widehat{BET})=120^\circ$ ,  $|EB|=4br$ ,  $|EM|=5br$ , M,T ve Z doğrusal noktalar olduğuna göre eşkenar üçgenin bir kenarı kaç birimdir?



- 7) MTL, MKA birer üçgendir.  $m(\widehat{MAK})=m(\widehat{MTL})$ , verilen uzunluklara göre  $a$  kaçtır?



- 8) BTZ bir üçgendir. Şekilde  $[LM] \parallel [KB]$ ,  $[KM] \parallel [ZB]$  dir.  $|TL|=20br$  ve  $|LK|=12br$  ise  $x$  kaçtır?

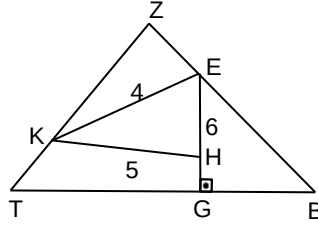


## ÜÇGENLER-7

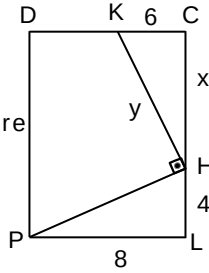
### BENZERLİK

#### DEĞERLENDİRME – 2

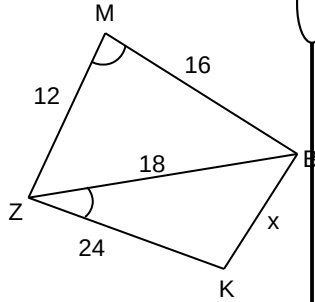
1. ZTB bir üçgen dir.  $[EG] \perp [TB]$ ,  $[KE] \perp [ZB]$ ,  $[ZT] \perp [KH]$ ,  $|KH|=5br$ ,  $|EH|=4br$ , ve  $\angle(TZB)=60$  br ise  $|BT|$  kaç birimdir?



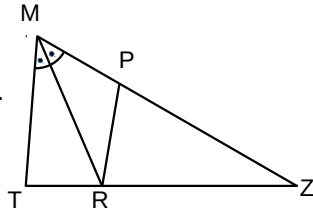
2. PLCD bir dikdörtgendir.  $[PH] \perp [KH]$ . Verilen uzunluklara göre x.y kaçtır?



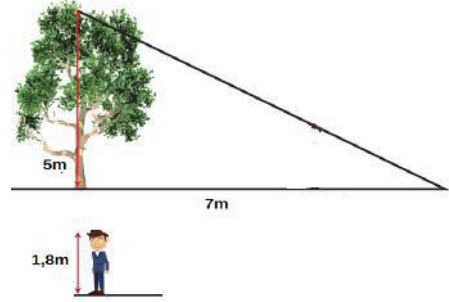
3. MBZ ve BZK birer üçgendir. ,  $m(\angle ZMB)=m(\angle BZK)$ , verilen uzunluklara göre x kaçtır?



4. MTZ bir üçgendir.  $[RP] \parallel [TM]$  dir.  $3 \cdot |PM|=2 \cdot |MT|=12br$ .  $A(\angle PRZ)=32$  br<sup>2</sup> ise  $A(\angle MTZ)$  kaç birim karedir?

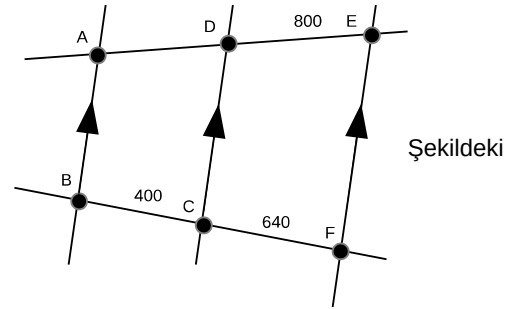


5.



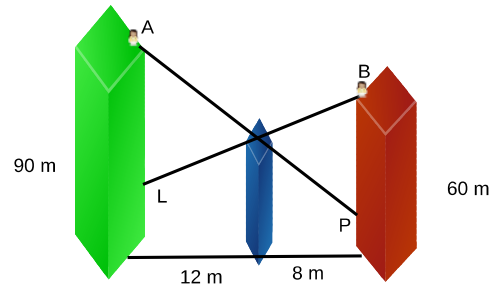
günün belli bir anında boyu 5m olan bir ağacın gölgesi 7m omaktadır. Buna göre aynı anda boyu 1,8 m olan kişinin gölgesinin uzunluğu kaç cm dir?

6.



Şekildeki krokide AB CD ve EF yolları paraleldir.  $|BC|=400$  km,  $|CF|=640$ km ve  $|DE|=800$  km olduğuna göre A ve D şehirleri arası mesafe kaç kilometredir?

7.



Şekilde yeşil renkli binanın yüksekliği 90 metre, bordo renkli binanın yüksekliği 60 metredir. A noktasından bakan bir göz, aradaki mavi bina sebebiyle bordo renkli binanın yüzde 80 ini görebiliyor. Buna göre , B noktasından bakan bir göz yeşil binanın kaç metresini görebilir?

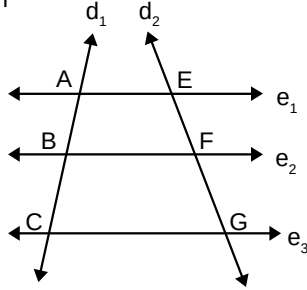
## ÜÇGENLER-7

### BENZERLİK

#### ÖZEL TEOREMLER

##### 1. Thales Teoremi

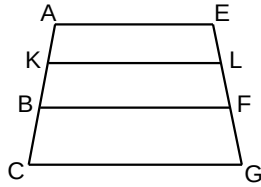
Birbirine paralel olan doğruların, herhangi iki kesen üzerinde ayırdığı karşılıklı doğru parçalarının uzunlukları orantılıdır.



Şekilde  $e_1 \parallel e_2 \parallel e_3$  ve buradan  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|FG|}$

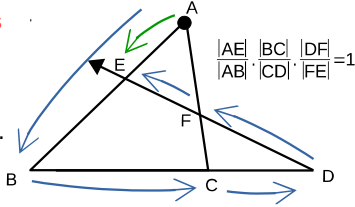
##### Örnek...1 :

Şekildeki  $[AE] \parallel [KL] \parallel [BF] \parallel [CG]$ ,  
3.  $|EL|=2$ ,  $|LF|=|FG|$   
 $|AB|+|KC|=70$  br olduğuna göre  $|AC|$  kaç birimdir?

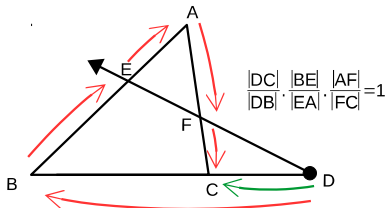


##### 2. Menelaus Teoremi

ABC bir üçgen olsun. Üçgenin bir kenarının uzantısından alınan D noktasından çizilen ışın diğer iki kenarı iki noktada kesiyorsa yandaki bağıntılar geçerlidir



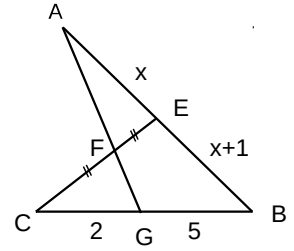
$$\frac{|AE|}{|AB|} \cdot \frac{|BC|}{|CD|} \cdot \frac{|DF|}{|FE|} = 1$$



$$\frac{|DC|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FC|} = 1$$

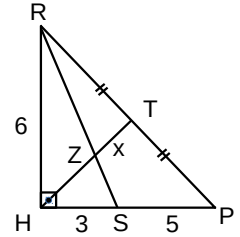
##### Örnek...2 :

AGB üçgen  $|CF|=|FE|$   
 $C \in BG, [CE] \cap [AG] = \{F\}$ .  
 $|CG|=2br, |GB|=5br$ ,  
 $|AE|=xbr, |EB|=1+xbr$   
verilen uzunluklara göre x kaçtır?



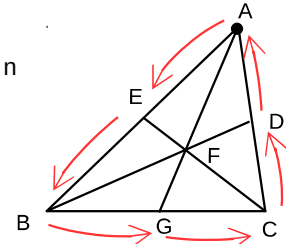
##### Örnek...3 :

RHP dik üçgeninde  $|RH|=6br, |HS|=3br, |SP|=5br$   
 $|RT|=|TP|$  ise  $|ZT|=x$  kaç birimdir?



##### 3. Ceva Teoremi

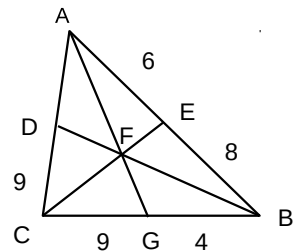
Üçgenin köşelerinden çıkıp karşı kenara çizilen doğru parçaları üçgenin içinde kesişiyorsa yandaki bağıntı geçerlidir.



$$\frac{|AE|}{|EB|} \cdot \frac{|BG|}{|GC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|} = 1$$

##### Örnek...4 :

Şekildeki ABC üçgeninde A, B ve C den çıkan doğru parçaları F de kesişiyor. Üçgenin çevresi verilen uzunluklara göre kaç birimdir

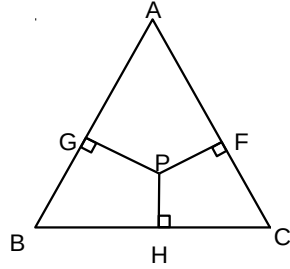


## ÜÇGENLER-7

### BENZERLİK

#### 4. Carnot Teoremi

ABC bir üçgen ve P iç bölgede herhangi bir nokta olsun. Bu noktadan kenarlara indirilen dikmeler için

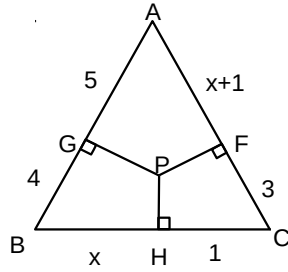


$$|AG|^2 + |BH|^2 + |CF|^2 = |GB|^2 + |HC|^2 + |AF|^2$$

bağıntısı geçerlidir.

#### Örnek...5 :

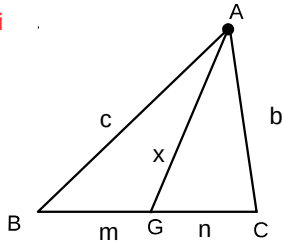
Şekilde ABC bir üçgen P iç bölgede bir nokta.  $[PH] \perp [BC]$ ,  $[PF] \perp [AC]$ ,  $[PG] \perp [AB]$  verilen uzunluklara göre x kaçtır?



#### 5. Stewart Teoremi

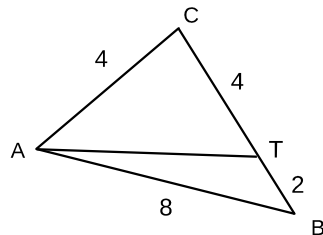
ABC üçgeninde  $G \in [BC]$  için aşağıdaki bağıntı geçerlidir

$$x^2 = \frac{m \cdot b^2 + n \cdot c^2}{m+n} - m \cdot n$$



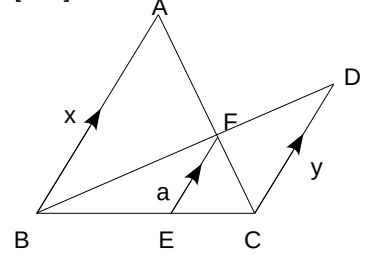
#### Örnek...6 :

ABC bir üçgen,  $T \in [CB]$  verilen uzunluklara göre  $|AT|$  kaç birimdir ?



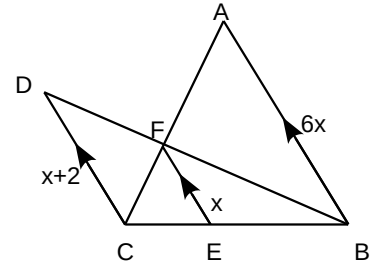
#### 6. $[AB] \parallel [FE] \parallel [DC]$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$



#### Örnek...7 :

Şekilde  $[AB] \parallel [FE] \parallel [DC]$  olduğuna göre  $|DC|$  kaç birimdir?

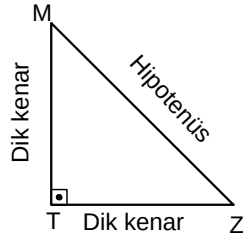


## ÜÇGENLER -8

### DİK ÜÇGEN-ÖKLİD-TEMEL TRİGONOMETRİ

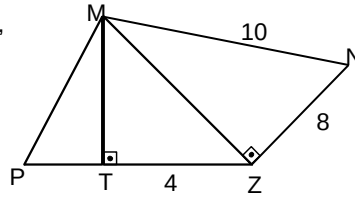
#### PİSAGOR BAĞINTISI

MTZ bir üçgen ve  $[MT] \perp [TZ]$  ise kenarlar arasında  $|TZ|^2 + |MT|^2 = |MZ|^2$  eşitliği geçerlidir.



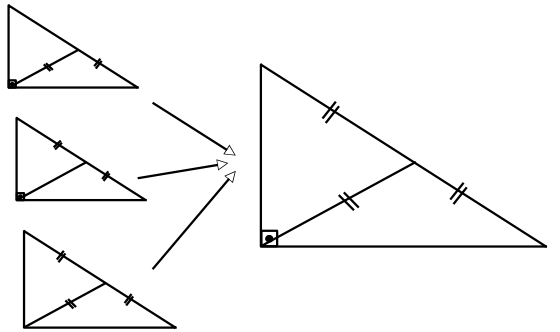
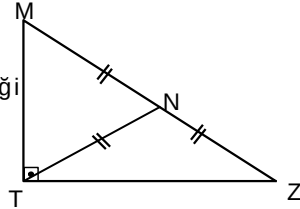
#### Örnek...1 :

MZN bir dik üçgen,  $[MT] \perp [PZ]$ ,  $|TZ|=4br$ ,  $|MN|=10br$ ,  $|ZN|=8br$  ve  $\frac{|MT|}{|PT|}=2$  ise  $|PM|$  kaç birimdir?



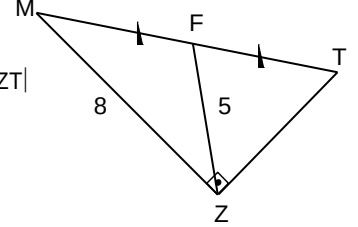
#### HİPOTENÜSE AİT KENARORTAY

N, hipotenüsün orta noktası ise  $|TN|=|MN|=|NZ|$  eşitliği geçerlidir



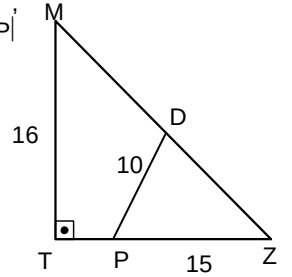
#### Örnek...2 :

MZT bir dik üçgen  $|MF|=|FT|$  dir.  $|MF|=5br, |MZ|=8$  ise,  $|ZT|$  kaç birimdir?



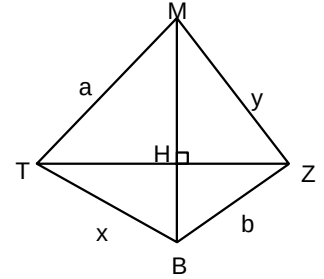
#### Örnek...3 :

MTZ bir dik üçgendir.  $|MD|=|DZ|$ ,  $|MT|=16br, |PD|=10br, |PZ|=15br$   $|TP|$  kaç birimdir?

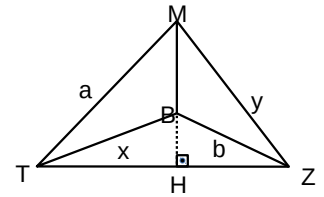


#### KÖŞEĞENLERİ DİK KESİŞEN DÖRTGENLER

MTBZ bir dörtgen ve  $[MB] \perp [TZ]$  ise  $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$

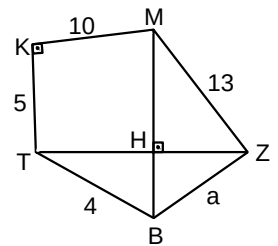


MTBZ bir iç bükey dörtgen ve  $MB \perp [TZ]$  ise  $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$



#### Örnek...4 :

$[MB] \perp [TZ]$  ve  $[KT] \perp [MZ]$  verilen uzunluklara göre a kaçtır?



## ÜÇGENLER -8

### DİK ÜÇGEN-ÖKLİD-TEMEL TRİGONOMETRİ

#### ÖKLİT BAĞINTILARI

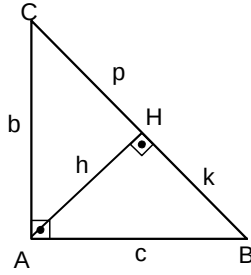
ABC bir dik üçgen ve  
[AH]⊥[BC] ,  
|AH|=h, |HB|=k, |CH|=p  
ise

$$h^2 = p \cdot k$$

$$b^2 = p \cdot (k+p)$$

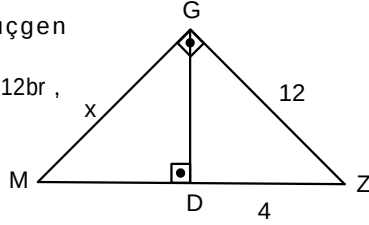
$$c^2 = k \cdot (k+p)$$

bağıntılar geçerlidir



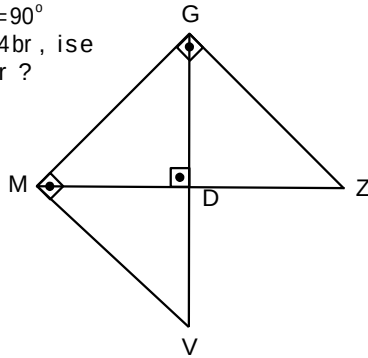
#### Örnek...5 :

Şekilde MGZ dik üçgen  
 $m(\widehat{G}) = m(\widehat{MDG}) = 90^\circ$   
Şekilde  $|GZ| = 3 \cdot |DZ| = 12br$ ,  
ise  $|GM| = x$  kaç  
birimdir ?

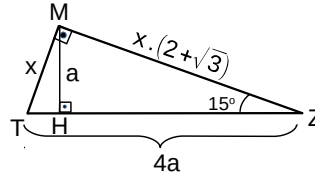
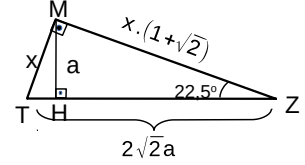
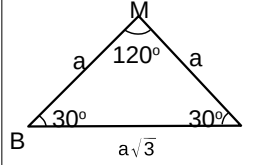
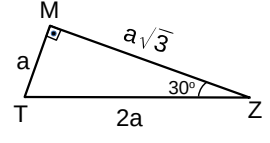
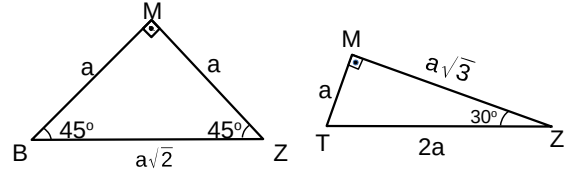


#### Örnek...6 :

Şekilde  
 $m(\widehat{G}) = m(\widehat{M}) = m(\widehat{MDG}) = 90^\circ$   
Şekilde  $|MD| = 2 \cdot |DV| = 4br$ , ise  
 $|GZ|$  kaç birimdir ?

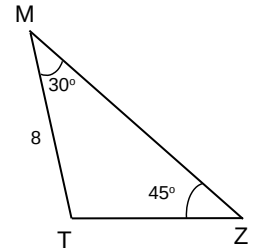


#### AÇILARINA GÖRE ÖZEL ÜÇGENLER



#### Örnek...7 :

MTZ bir üçgen  
 $m(\widehat{TMZ}) = 30^\circ$   $m(\widehat{TZM}) = 45^\circ$  dir.  
 $|MT| = 8br$   
ise,  $|MZ|$  kaç birimdir ?

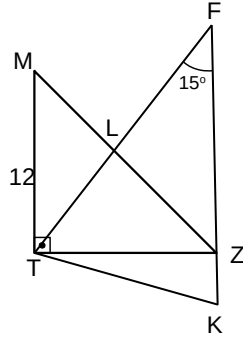


## ÜÇGENLER -8

### DİK ÜÇGEN-ÖKLİD-TEMEL TRİGONOMETRİ

#### Örnek...8 :

MTZ bir dik üçgendir.  
[MT] // [FK],  
|MT|=12br, |FK|=20br ,  
 $m(\widehat{TFK})=m(\widehat{ZTK})=15^\circ$   
Buna göre |MZ| kaç  
birimdir?



### DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  olmak üzere

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

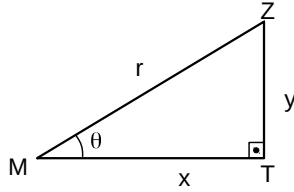
$$\sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\cot(\theta) = \frac{x}{y}$$

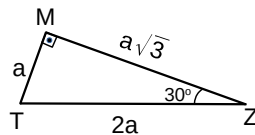
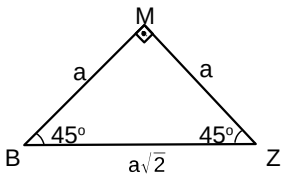
Ayrıca

$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$  ve  $\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  bağıntıları elde edilir.



#### Örnek...9 :

Değerleri üçgenleri kullanarak bulunuz



$$\cos 45 =$$

$$\sin 45 =$$

$$\tan 45 =$$

$$\cot 45 =$$

$$\cos 30 =$$

$$\sin 30 =$$

$$\tan 30 =$$

$$\cot 30 =$$

$$\cos 60 =$$

$$\sin 60 =$$

$$\tan 60 =$$

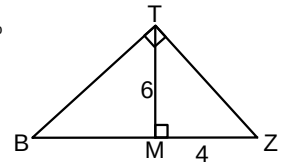
$$\cot 60 =$$

#### Örnek...10 :

x dar bir açı olmak üzere,  $\cos(x) = \frac{2}{3}$  ise  
 $\sin^2(x) - \tan^2(x)$  kaçtır?

#### Örnek...11 :

TBZ bir dik üçgen  
 $m(\widehat{TMZ}) = 90^\circ = m(\widehat{BTZ}) = 90^\circ$   
|TM|=6br, |MZ|=4br ise  
 $\cos(\widehat{TBM})$  kaçtır?

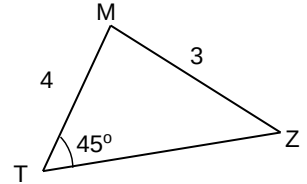


#### Örnek...12 :

x dar bir açı olmak üzere,  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$   
olduğunu gösteriniz.

#### Örnek...13 :

MTZ bir üçgendir.  
 $m(\widehat{T}) = 45^\circ$   
|TM|=4br, |MZ|=3br,  
olduğuna göre  
 $\tan(Z)$  kaç olabilir?



#### Örnek...14 :

Şekilde boyu 5 m olan  
merdiven duvara dayalı  
olarak durmaktadır.  $\sin \alpha = 0,6$   
olduğuna göre, merdivenin  
zemine değdiği noktanın  
duvara olan uzaklığı kaç  
cmdir?

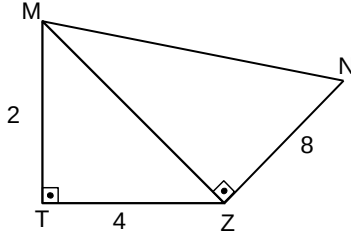


## ÜÇGENLER -8

### DİK ÜÇGEN-ÖKLİD-TEMEL TRİGONOMETRİ

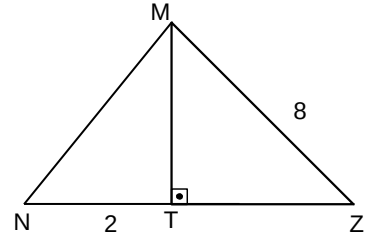
#### DEĞERLENDİRME - 1

- 1) MTZ ve MZN birer dik üçgendir.

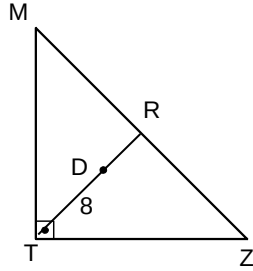


4.  $|MT|=2$ ,  $|TZ|=|ZN|=8$  br ise  $|MN|$  kaç birimdir?

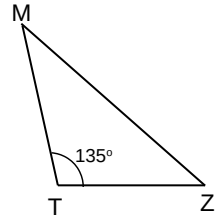
- 4) MNZ bir üçgen ,  
 $[NZ] \perp [TM]$  ,  
 $|MN|=|TZ|$   
4.  $|NT|=|MZ|=8$  cm  
ise  $|MT|$  kaç birimdir?



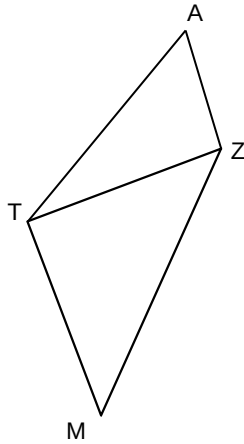
- 2) MTZ bir üçgen D ağırlık merkezidir  
 $|TD|=8$ cm, ise  
 $|MZ|$  kaç cm dir?



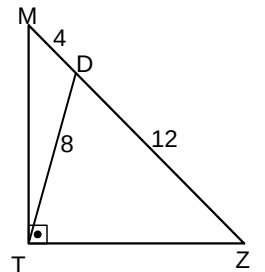
- 5) MTZ bir üçgen,  
 $m\widehat{MKZ}=135^\circ$   
Şekilde  $|MT|=7$ br ,  
 $|TZ|=5\sqrt{2}$ br ise  $|MZ|$  kaç birimdir ?



- 3) MTZ ve ATZ birer üçgen,  $[AZ] \perp [TZ]$   
 $[MT] \parallel [AZ]$  ,  
 $|AT|=2 \cdot |AZ|+1=17$ br ,  
 $|TM|=20$ br  
Buna göre  $|MZ|$  kaç birimdir?



- 6) MTZ bir dik üçgen,  
2.  $|MD|=|TD|=8$ br ,  $|ZD|=12$ br  
ise  $|TZ|$  kaç birimdir?

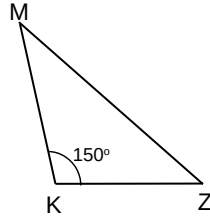


## ÜÇGENLER -8

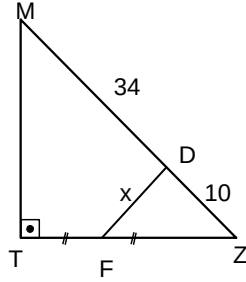
### DİK ÜÇGEN-ÖKLİD-TEMEL TRİGONOMETRİ

#### DEĞERLENDİRME - 2

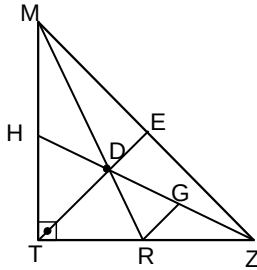
- 1) MKZ bir üçgen  
 $m\widehat{MKZ}=150^\circ$  dir.  
 $|MK|=8br$ ,  $|KZ|=6\sqrt{3}br$   
 ise,  $|MZ|$  kaç birimdir?



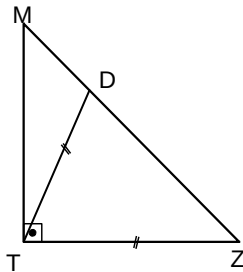
- 2) MTZ bir dik üçgendir.  
 $|TF|=|FZ|$  ve  
 $|ZD|=10br$ ,  $|DM|=34br$ ,  
 $|FD|$  kaç birimdir?



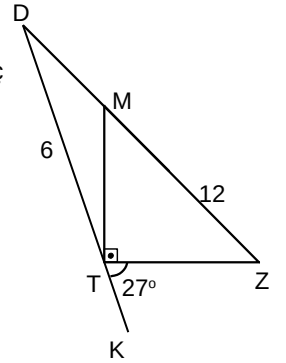
- 3) MTZ bir üçgen D  
 ağırlık merkezidir.  
 $[RG] \parallel [TE]$ ,  
 Şekilde  $|MZ|=24br$ ,  
 $|RG|$  kaç  
 birimdir ?



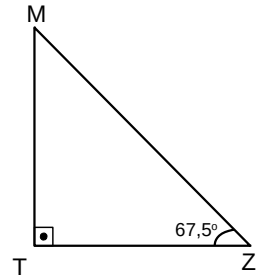
- 4) MTZ bir dik üçgendir.  
 $|TD|=|TZ|$  ve  
 $|MD|=9br$ ,  $|DZ|=8br$ ,  
 $|TM|$  kaç birimdir?



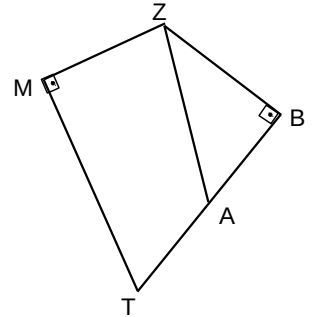
- 5) MTZ bir dik üçgen,  
 $2 \cdot |TD| = |MZ| = 12br$ ,  
 $m(\widehat{ZTK}) = 27^\circ$  ise  $m(\widehat{Z})$  kaç  
 derecedir?



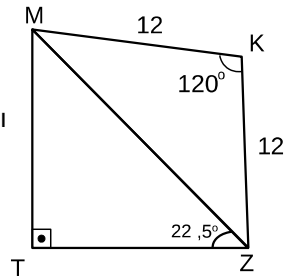
- 6) MTZ bir dik üçgendir.  
 $|MT| = 6 + 6\sqrt{2}br$ ,  $|TZ|$  kaç  
 birimdir?



- 7) MTBZ bir dörtgendir.  
 $[TM] \perp [MZ]$ ,  $[TB] \perp [BZ]$ .  
 $|TM| = |AZ|$ ,  $|MZ| = 6br$   
 $|AB| = 3br$ ,  $|AT|$  kaç  
 birimdir ?



- 8) MTZ bir dik üçgendir.  
 $|MK| = |MZ| = 12br$ ,  
 $m(\widehat{MTZ}) = 22,5^\circ$  ise T  
 noktasının  $[MZ]$  na uzaklığı  
 kaç birimdir?

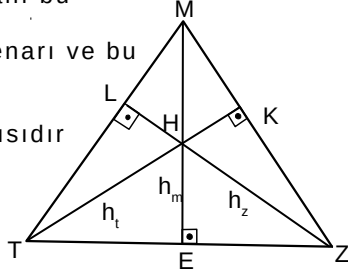


## ÜÇGENLER-9

### ÜÇGENDE ALAN

#### ÜÇGENDE ALAN BAĞINTILARI

Bir üçgenin alanı bu üçgenin herhangi bir kenarı ve bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır

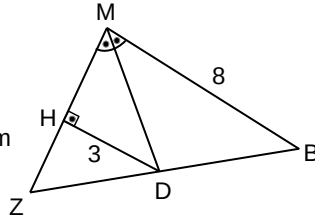


Üçgenin yükseklikleri tek noktada kesişir. Bu nokta diklik merkezidir. Merkez üçgensel bölgeye ait olmayabilir.

$$A(MTZ) = \frac{m \cdot h_m}{2} = \frac{z \cdot h_z}{2} = \frac{t \cdot h_t}{2}$$

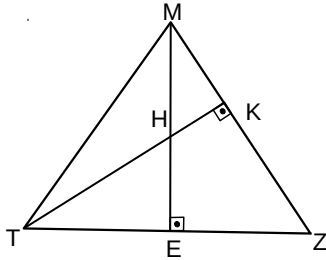
#### Örnek...1 :

MBZ bir üçgendir.  
 $|HD|=3br$ ,  $|MB|=8br$ ,  
 $[MD]$ ,  $M$  açısının açıortayı olduğuna göre  $A(MDB)$  kaç birim karedir?



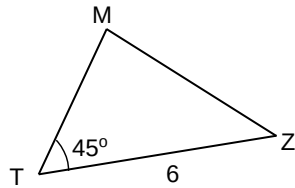
#### Örnek...2 :

MTZ bir üçgen,  
 $|TK|=6br$ ,  
 $|MZ|=12br$ ,  
 $|ME|=8br$   
ise  $|TZ|$  kaç birimdir?



#### Örnek...3 :

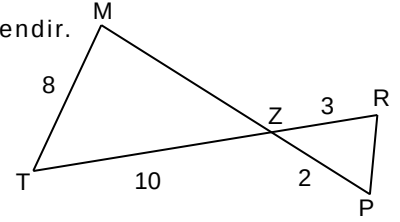
MTZ bir üçgendir.  
 $|MT|=8\sqrt{2}br$ ,  
 $|TZ|=6br$ ,  $m(\hat{T})=45^\circ$   
ise bu üçgenin alanı kaç birim karedir?



#### Örnek...4 :

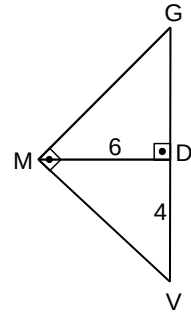
MTZ bir dik üçgendir.

$[TR] \cap [MP] = [Z]$ ,  
 $m(\hat{M})=90^\circ$  verilen uzunluklara göre  $A(PRZ)$  kaç birim karedir?



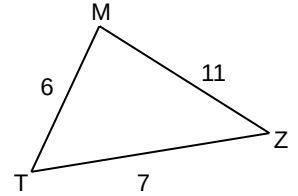
#### Örnek...5 :

MTZ bir üçgen  
 $m(\hat{GMV})=m(\hat{MDG})=90^\circ$ ,  
 $|DV|=4br$ ,  $|MD|=6br$  dir.  
Buna göre  $A(GMV)$  kaç birim karedir?



#### Örnek...6 :

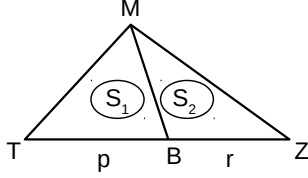
MTZ bir üçgendir.  
 $|MT|=6br$ ,  $|MZ|=11br$ ,  
 $|ZT|=7br$  olduğuna göre  $A(MTZ)$  kaç birim karedir?



## ÜÇGENLER-9

### ÜÇGENDE ALAN

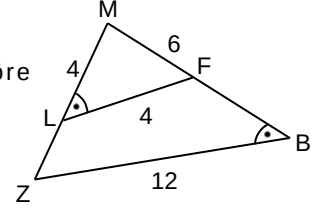
Yükseklikleri aynı olan üçgenlerde, alanlar tabanlarla doğru orantılıdır  
 $\frac{A(MTB)}{A(MBZ)} = \frac{p}{r}$   
Tabanlar aynıysa alanlar yüksekliklerle doğru orantılıdır.



Bezer iki üçgenin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

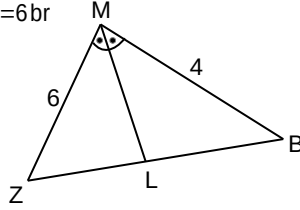
#### Örnek...10 :

MBZ bir üçgendir.  
 $|LM| = |LF| = 4br$ ,  
 $2|MF| = 4br$ ,  $|ZB| = 12br$ ,  
 $m(\hat{L}) = m(\hat{B})$  olduğuna göre  
 $A(ZBFL)$  kaçtır?



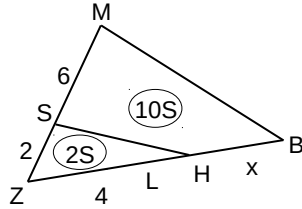
#### Örnek...7 :

MBZ bir üçgendir.  $|MK| = 6br$ ,  
 $|MB| = 4br$  ise,  $\frac{A(MLB)}{A(MZB)}$   
kaçtır?



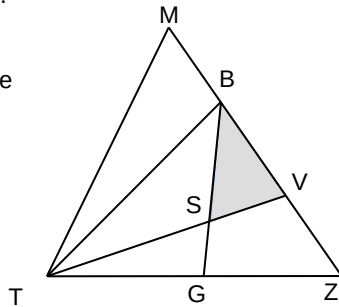
#### Örnek...8 :

MBZ bir üçgendir.  
 $6|SZ| = 3|ZL| = 6|SM| = 12br$   
 $2S$  ve  $10S$  verilen bölgelerin alanı ise,  $x$  kaçtır?



#### Örnek...9 :

MTZ bir üçgendir.  
 $|S| = |TV| \cap |GB|$ ,  
 $2|VZ| = |BV| = |MB|$   
ve  $2|SV| = |TS|$  göre  
 $\frac{A(BSV)}{A(MTZ)}$  kaçtır?



#### Örnek...11 :

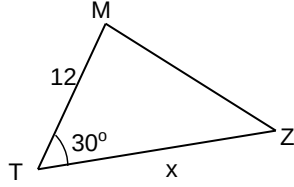
Alanı  $16\sqrt{3} br^2$  olan eşkenar üçgenin yüksekliği kaç birimdir?

## ÜÇGENLER-9

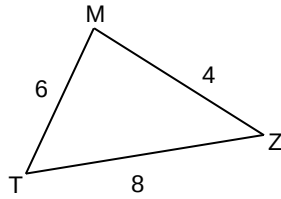
### ÜÇGENDE ALAN

#### DEĞERLENDİRME

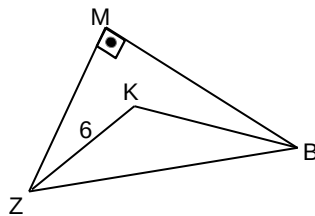
- 1) MTZ bir üçgendir.  
 $|MZ|=12$  br,  
 $m(\widehat{T})=30^\circ$  bu  
üçgenin alanı 60  
birim kare ise  
 $|TZ|=x$  kaç  
birimdir?



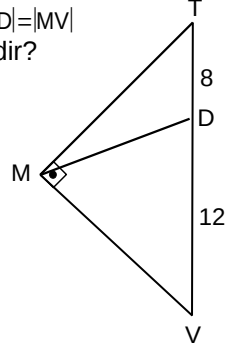
- 2) MTZ bir üçgendir.  
 $2|MZ|=|TZ|=8$  br,  
 $|MT|=6$  olduğuna  
göre  $A(MTZ)$  kaç  
birim karedir?



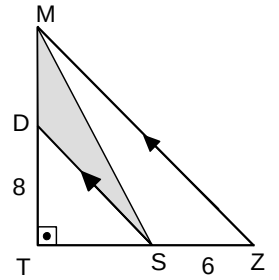
- 3) MBZ bir üçgendir.  
 $m(\widehat{BMZ})=90^\circ$ ,  
 $m(\widehat{MZK})=18^\circ$ ,  
 $m(\widehat{MBK})=12^\circ$ ,  
 $|KB|=6$  br,  
 $|BZ|=2\sqrt{19}$  br  
olduğuna göre  
 $A(KZB)$  birimdir?



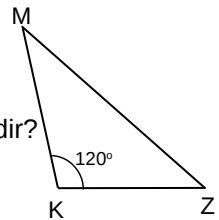
- 4) MTV bir dik üçgen  
 $|TD|=8$  br  $|DV|=12$  br dir.  $|MD|=|MV|$   
ise,  $A(TMD)$  kaç birim karedir?



- 5) MTZ bir dik üçgendir.  
 $|SZ|=6$  br,  $|TD|=8$  ise  
 $A(MDS)$  kaç birimdir?



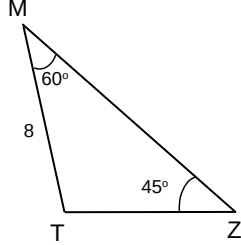
- 6) MKZ bir üçgen  
 $m(\widehat{MKZ})=120^\circ$  dir.  
 $|MK|=8$  br,  $|KZ|=6\sqrt{3}$  br  
ise,  $A(MKZ)$  kaç birim karedir?



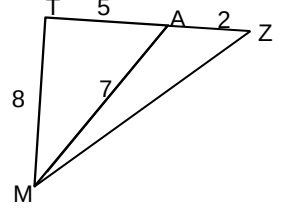
## ÜÇGENLER-9

### ÜÇGENDE ALAN

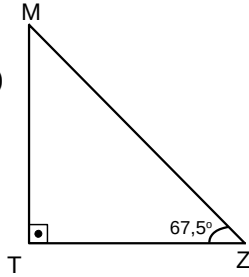
- 7) MTZ bir üçgen  
 $m(\widehat{TMZ})=60^\circ$   
 $m(\widehat{TZM})=45^\circ$  dir.  
 $|MT|=8br$   
ise,  $A(MTZ)$  kaç birim karedir?



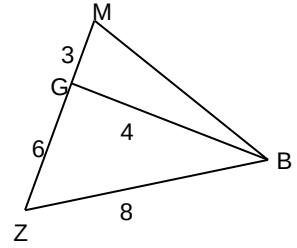
- 10) MTZ bir üçgendir.  
Verilen uzunluklara göre  
 $A(MZA)$  kaç birim karedir?



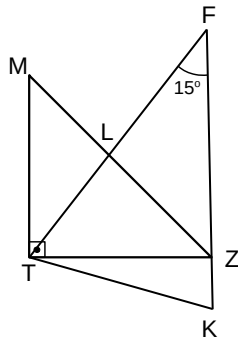
- 8) MTZ bir dik üçgendir.  
 $|MZ|=12\sqrt{2}br$ ,  
 $m(\widehat{Z})=67,5^\circ$  ise  $A(MTZ)$   
kaç birim karedir?



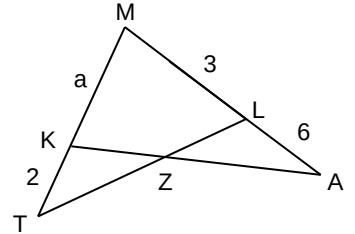
- 11) MBZ bir üçgendir.  
 $2|MG|=|GZ|=6br$ ,  
 $2|BG|=|BZ|=8br$  ise  
 $Alan(MBZ)$  kaç  
birimdir?



- 9) MTZ bir dik üçgendir.  
 $[MT] \parallel [FK]$ ,  
 $|FK|=16br$ ,  
 $m(\widehat{TFK})=m(\widehat{ZTK})=15^\circ$   
Buna göre  $A(TFK)$  kaç  
birim karedir?



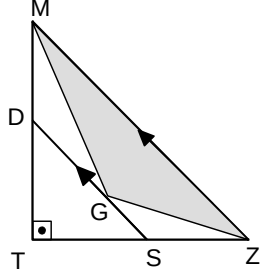
- 12) MTL, MKA birer  
üçgendir.  
 $K \in [MT], L \in [MA]$   
 $A(\widehat{TKZ})=A(\widehat{LZA})$ ,  
verilen uzunluklara  
göre a kaçtır?



## ÜÇGENLER-9

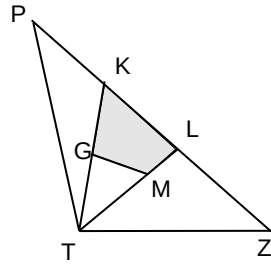
### ÜÇGENDE ALAN

- 13) MTZ bir dik üçgen ve G noktası bu üçgenin ağırlık merkezidir.  $|TD|=6$   $|TZ|=8$  ise  $A(MGZ)$  kaç birimdir?

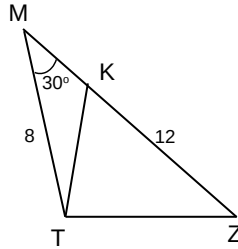


- 16) Alanı  $9\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> olan eşkenar üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı kaç birimdir?

- 14) PTZ bir üçgendir.  $|TG|=|KG|$ ,  $3 \cdot |ML|=2 \cdot |TM|$  K ve L noktaları [PZ] ni üç eş parçaya ayırıyorsa taralı alan PTZ üçgeninin alanının yüzde kaçtır?



- 15) MTZ bir üçgendir.  $|MT|=8br$ ,  $|KZ|=12br$ ,  $m(\widehat{M})=30^\circ$ , olduğuna göre  $A(KTB)$  kaçtır?



**İSTATİSTİK**

Bir sonuç çıkarmak ya da çözüme ulaşabilmek için gözlem, deney, araştırma gibi yöntemlerle toplanan bilgiye **veri** adı verilir.

Toplumsal nitelikteki olaylarla ilgili sayısal (kantitatif) verileri toplamak, bu verileri analiz etmek ve bunlardan sonuçlar çıkarılmasında kullanılan matematiğe dayalı bilim dalına istatistik denir. Sosyal bilimler, biyoloji ve tıp alanlarında kullanılır. Toplum olaylarıyla onları etkileyen değişkenler arasındaki ilişkiler hakkında genellemeler yapılmasına imkan verir.

**MERKEZİ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ**

Merkezi eğilim ölçüleri mod, medyan ve aritmetik ortalamadır.

Merkezi eğilim ölçüleri, bir konuda toplanan verilerin hangi değer etrafında toplandığı hakkında yorum yapmaya yarayan değerlerdir.

**1) ARİTMETİK ORTALAMA**

Bir dizide terimler toplamının toplam veri adetine bölerek buluruz.

**Örnek...1 :**

1,2,41,18,2,8 verilerinin aritmetik ortalaması nedir?

**Örnek...2 :**

2,4,4,7,7,7,8,8 verilerinin aritmetik ortalaması nedir?

**Örnek...3 :**

Bir otoparktaki araç sayısının günlere göre dağılımı tabloda özetlenmiştir.

Günler	P.tesi	Sah	Çrş.	Prş.	Cuma	C.tesi	Pazar
Duraktaki araç sayısı	10	20	30	22	34	120	115

Buna göre günde ortalama kaç araç bu parkta bulunmaktadır?

**Örnek...4 :**

İlk iki sınavında 75 ve 82 alan bir öğrencinin bu dersin ortalamasını 5 yapabilmek için son sınavdan kaç alması gerekmektedir?

**2) MEDYAN (ORTANCA)**

Dizinin terimleri büyükten küçüğe ya da küçükten büyüğe doğru sıralandığında baştan ve sondan eşit uzaklıktaki sayıya medyan ( ortanca ) denir.

Eğer veri dizisi tek elemanlıysa ortadaki veri medyandır.

Eğer veri dizisi çift elemanlıysa ortada bulunan iki verinin aritmetik ortalamasıdır.

**Alıştırma**

1) 21,15,34,15,24,15,67 verilerinin medyanı nedir?

**Çözüm**

Veriler düzenlenirse 15,15,15,21,24,34,67 dolayısıyla medyan 21 olur.

2) 1,5,154,25,20,21 verilerinin medyanı nedir?

**Çözüm**

Veriler düzenlenirse 1,5,20,21,25,154 dolayısıyla medyan  $\frac{20+21}{2}=20,5$  olur.

**Örnek...5 :**

12,16, 60, 17, 7, 81,12 verileri için medyan nedir?

**Örnek...6 :**

52, 26, 6, 7, 8, 12 verileri için medyan nedir?

### Örnek...7 :

x, 51, 8, 8, 12 verileri için medyan x ise x kaç farklı tamsayı değeri alabilir?

### 3) MOD (TEPE DEĞER)

Bir dizide en çok tekrarlanan sayıya mod (tepe değeri) denir.

Veri grubunda her değer farklı ise mod bulunmaz.

Aynı sayıda birden çok tekrar eden veri varsa birden çok tepe değeri vardır.

Veri grubunda bir terimin tekrar sayısına o terimin frekansı denir.

### Örnek...8 :

2,5,8,11,24,15,67 verilerinin modu nedir?

### Örnek...9 :

1,1,3,5,1,3,67 verilerinin modu nedir?

### Örnek...10 :

78,17,3,3,4,5,5 verilerinin modu nedir?

### Örnek...11 :

8, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13 verileri için mod nedir?

### UYARILAR

1. Mod uygulamada farkına varılmadan en çok başvurulan ortalamalardan biridir. Örneğin, giyim eşyası üretiminde en çok satılan numaralar ve bedenler dikkate alınır ki, bu, mod hesabı anlamını taşır.

2. Mod (ve medyan) anormal terimlerin etkisi altında kalmaz. Örneğin bir gruba grup ortalamasının çok üzerinde yaşa sahip yeni bir birey katılması modu değiştirmez.

3. Aritmetik ortalama ve medyan sayısal veriler için hesaplanabilirken, tepe değeri hem sayısal hem de nitel veriler için hesaplanabilir.

### MERKEZİ DAĞILIM (YAYILIM) ÖLÇÜLERİ

Dizideki terimlerin birbirine yakınlığı ya da uzaklığı hakkında bilgi veren ölçülerdir. Verinin nasıl dağıldığının ölçüsüdür denilebilir.

#### 1) ÜST UÇ DEĞER

Verilerin en büyük olanıdır.

#### 2) ALT UÇ DEĞER

Verilerin en küçük olanıdır

#### 3) AÇIKLIK (ARALIK, RANJ)

Veri grubundaki en büyük ve en küçük değer arasındaki farktır

### Örnek...12 :

78,17,3,3,4,5,5,78 verilerinin açıklığı nedir?

### Örnek...13 :

1,2,3,3,3,3,4,4,5,7,7,7,8,9,10 verilerinin açıklığı nedir?

**4) VARYANS VE STANDART SAPMA**

Standart sapma dizideki her bir değerin aritmetik ortalamaya yakınlığını gösterir. Standart sapmanın küçük olması aritmetik ortalamadan sapmaların az olduğunu ve riskin az olduğunu, standart sapmanın büyük olması ise aritmetik ortalamadan sapmaların çok olduğunu ve riskin de fazla olduğunu gösterir.

Bir veri grubunun varyans ve standart sapma aşağıdaki gibi bulunur.

I. Veri grubunun aritmetik ortalaması bulunur.

II. Her verinin aritmetik ortalama ile farkının kareleri alınır ve toplanır.

III. Bulunan toplam, veri sayısının 1 eksiğine bölünür bu değer varyanstır

IV. Varyansın karekökü alınır. Bu değer standart sapmadır.

Sembolik olarak

$X_i$  ler veri ve  $\bar{X}$  ortalama olmak üzere

$$\text{varyans} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}$$

standart sapma =  $\sqrt{\text{varyans}}$   
(UYARI Kullanılan Yığın ise paydada n , örneklem ise n-1 kullanılır)

**Örnek...14 :**

4, 8, 12 verilerinin standart sapmasını bulunuz

**Örnek...15 :**

Aşağıdaki verilerinin standart sapmalarını bulunuz

a) 1,2,3,4,5

b) 1,2,3,3,3,4,4,5,7,7

c) 10,22,38,26,4

**UYARI**

Aritmetik ortalama dağılımın yaygınlığı hakkında bir bilgi vermez.

İki dağılımın aritmetik ortalamaları aynı iken yayılımı farklı olabilir.

Mesela 3, 6, 9 sayılarının aritmetik ortalaması ile 1, 2,15 sayılarının aritmetik ortalamaları 6 dır.

Birinci dizideki değerler aritmetik ortalamaya çok yakınken ikinci dizideki değerler aritmetik ortalamadan uzaktır.

Bir dağılımda aritmetik ortalamadan uzaklaştıkça dağılımın yaygınlığı artar.

Dağılımın yaygınlığını gösteren terimlerden biri de standart sapmadır.

**UYARI**

Aritmetik ortalama, ortanca (medyan), tepe değeri (mod) 'merkezi eğilim';

açıklık, çeyrekler açıklığı standart sapma ise "merkezi yayılma" ölçüleridir

**Alıştırma**

- I. Borsada riskin az olduğu yatırım araçlarını bulmak için standart sapma
- II. Bir sınıfta öğrencilerin en sevdiği rengi bulmak için mod
- III. Bir okuldaki en başarılı öğrenciyi bulmak için aritmetik ortalama kullanılabilir.

## İSTATİSTİKİ TEMSİL BİÇİMLERİ

Grafikler sayesinde sayısal verileri daha hızlı ve kolay yorumlayabiliriz. Grafikler verileri görsel hale getirir ve sonuçları daha çabuk ve sağlıklı ulaşmamızı sağlar

## KESİKLİ VE SÜREKLİ VERİLER

Kesikli veri sayılarak elde edilen tam sayılı değerlerdir. Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alamayan veri türüdür. Nüfus, bir evdeki insan sayısı gibi.

Sürekli veri reel sayı değeri alabilen nicel verilerdir. Boy, kütle gibi. Sürekli veriler ölçümle belirtilirler.

## HISTOGRAM GRAFİĞİ

Verilerin gruplandırılarak sütun grafiği şeklinde gösterilmesine histogram denir.

Histogram Grafiği oluşturulurken  
Adım 1. Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır.  
Adım 2. Açıklık bulunur.  
Adım 3. İstenilen grup sayısı belirlenir.  
Adım 4. Grup genişliği  $\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}}$  oranından büyük, en küçük doğal sayıdır.

## Örnek...16 :

Bir yaz okulunda kampına katılan 18 öğrencinin yaşları 13, 12, 14, 10, 16, 12, 11, 13, 16, 15, 15, 8, 9, 11, 13, 17, 16, 9 olarak verilmiştir. Bu verileri 4 gruplu histogram grafiğini oluşturalım

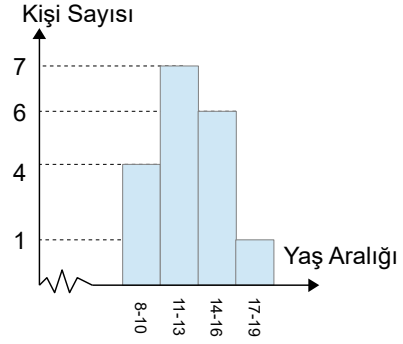
Adım 1. verileri küçükten büyüğe dizelim:  
8,9,9,10,11,11,12,12,13,13,13,14,15,15,16,16,16,17  
Adım 2. Açıklık 17-8=9

Adım 3. Genişlik  $\frac{9}{4}=2,25$  olduğundan 3

Adım 4.

Yaş Aralığı	Kişi Sayısı
8-10	4
11-13	7
14-16	6
17-19	1

Buna göre histogram grafiği şekildeki gibidir

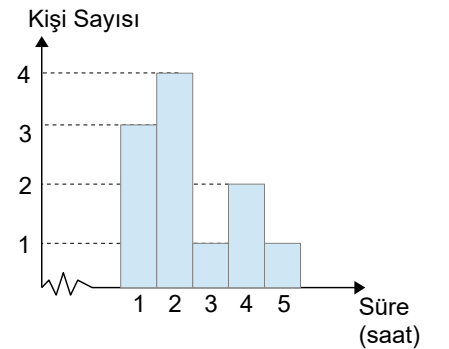


## Örnek...17 :

Sınıf arkadaşlarına anket yapan Burak, arkadaşlarına haftada kaç saatlerini bilgisayar başında geçirdiklerini sormuştur. Arkadaşlarının verdiği cevaplar: 14, 10, 8, 10, 6, 9, 15, 4, 16, 12, 20, 17, 18, 16, 15, 10, 11,12,15,14 olarak verilmiştir. Bu verilerin 5 gruplu histogram grafiğini oluşturunuz

## Örnek...18 :

Aslı arkadaşlarına haftada kaç saat kitap okuduklarını sormuş ve topladığı verilere göre grafiği oluşturmuştur. Buna göre verilerin , açıklık,ortanca, tepe değeri ve aritmetik ortalamasını bulunuz.



## GRAFİK TÜRLERİ

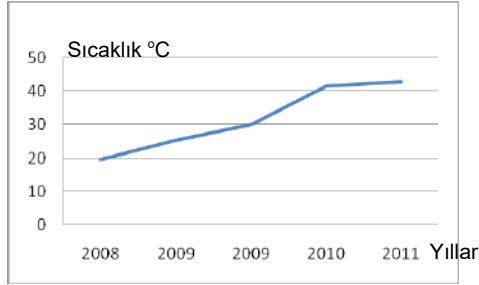
## 1.ÇİZGİ GRAFİĞİ

Bir niteliğin belirli zaman aralıkları içindeki değişimini incelemek için kullanılır. Sürekli verilerin yatay ve düşey eksenlerdeki değerleri işaretlenerek bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucunda elde edilen grafik türüdür.

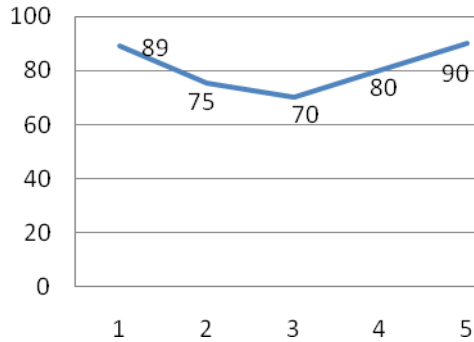
## Örnek...19 :

Aşağıdaki tabloda bir gezegendeki yüzey sıcaklığının (°C) yıllara göre değişimi verilmiştir. İnceleyiniz

2008	19,7
2009	25,4
2009	30
2010	41,6
2011	42,9



## Örnek...20 :



Yukarıdaki grafik havadaki nem oranının arkaya 5 gündeki değerlerini yüzde olarak vermektedir.

## Örnek...21 :

Rejim yapan bir kişinin aylara göre ağırlıkları tablodaki gibidir. Buna göre verilerin çizgi grafiğini yapınız.

Ocak	75
Şubat	73
Mart	70
Nisan	68
Mayıs	67
Haziran	64
Temmuz	62

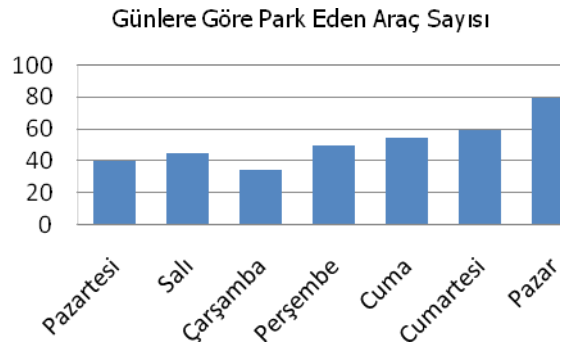
## 2.SÜTUN GRAFİĞİ

Nicelikleri karşılaştırmak için kullanılır

## Örnek...22 :

Aşağıdaki tabloda bir araç parkında günlere göre park eden araçların sayısı verilmiştir.

Pazartesi	40
Salı	45
Çarşamba	35
Perşembe	50
Cuma	55
Cumartesi	60
Pazar	80



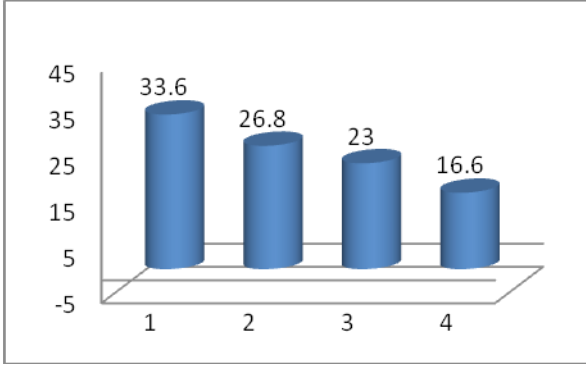
## İSTATİSTİK

### VERİ

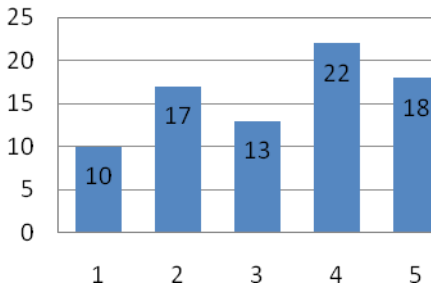
#### Örnek...23 :

Aşağıdaki tabloda bir ülkede yıllara göre üretilen sebze miktarı (milyon ton olarak) verilmiştir

2009	33,6
2010	26,8
2011	23
2012	16,6



#### Örnek...24 :

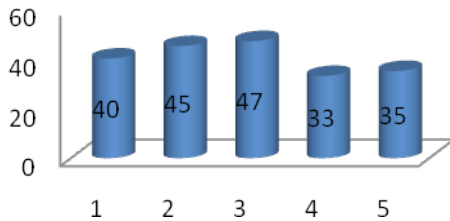


Yukarıdaki grafik bir galerinin günlere göre sattığı araba miktarını göstermektedir.

Grafiğe göre

- satışların % kaç 2. Gün yapılmıştır?
- günde ortalama kaç araba satılmıştır?

#### Örnek...25 :



Yukarıdaki grafik beş okulda okuyan kız öğrenci yüzdelere göstermektedir. Grafiğe göre kızlar tüm öğrencilerin yüzde kaçındır?

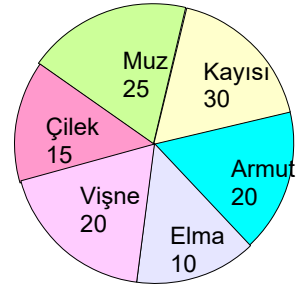
### 3. DAİRE GRAFİĞİ

Daire grafiği bir bütünü parçalarını karşılaştırmak için kullanılır

#### Örnek...26 :

Aşağıdaki tabloda bir manavda bir günde günlere göre satılan meyve miktarı (kg olarak) verilmiştir

Elma	10
Armut	20
Muz	25
Kayısı	30
Çilek	15
Vişne	20



#### Örnek...27 :

Yukarıdaki grafik bir matematik test kitabındaki soruların 9,10,11 ve 12 sınıflara göre dağılımını göstermektedir. Buna göre 10. sınıf sorularının diliminin merkez açısının ölçüsü kaç derece olur?

