

9. SINIF MATEMATİK DERS NOTLARI

1. ÜNİTE : MANTIK

ÖNERMELER

Önerme Nedir?

Önermeler ta, doğrulanabilir ya da yanlışlanabilir olmak zorunda olan ifadelere önerme denir. Önermeler genellikle “p, q, r, s, t” gibi küçük harflerle gösterilir.

Kesin olan cümleler yanlış veya doğru da olsa önermedir; yani cümlenin yanlış veya doğru olduğunun bilinmesi gerekmez, doğrulanabilir olduğunun bilinmesi yeterlidir. Soru tümceleri önerme olamaz çünkü bir soru doğruluk ifade etmez. Mantığın önermelerle ilgilenen dalı önermeler mantığıdır ve matematiğin konusudur.

→“Alp’in boyu kısadır.” ifadesi önerme değildir.

Çünkü kısa olmanın bir ölçütü yoktur.

→“Adem’in kilosu 20 kg’dır.” ifadesi önermedir.

Çünkü Adem kilosu 20 kg olup olmadığı belirlenebilir.

→“Türkiye’nin başkenti Ankara’dır.” ifadesi bir önermedir.

Önermenin Doğruluk Değeri

Önerme, doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadedir. Şu halde önermenin olası iki farklı doğruluk değeri vardır. İki değerli Önermeler ta üçüncü bir değer yoktur.

Bir önerme doğru ise doğruluk değeri “D” veya “1” ile, yanlış ise “Y” veya “0” ile gösterilir.

Bir p önermesi doğru ise $p \equiv 1$, yanlışsa $p \equiv 0$ olarak ifade edilir.

→p: “5 + 2 = 7 olur.” önermesi doğrudur.

Bu durum $p \equiv 1$ şeklinde gösterilir.

→ q: “Paris bir ülkedir.” önermesi doğru değildir.

Bu durum $q \equiv 0$ şeklinde gösterilir.

→ r: “2 asal sayıdır.” önermesi doğrudur.

Bu durum $r \equiv 1$ şeklinde gösterilir.

Doğruluk Değer Sayısı ve Değer Tablosu

n tane farklı önermenin, birlikte 2n tane farklı doğruluk değeri vardır. Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.

*Bir p önermesinin 2 (2^1) tane doğruluk değeri vardır. Doğruluk değeri tabloda aşağıdaki şekilde gösterilir.

p

D veya 1
Y veya 0

* p ve q gibi iki önermenin 4 (2^2) tane doğruluk değeri vardır.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

* p, q, r gibi üç önermenin 8 (2^3) tane doğruluk değeri vardır.

p q r

1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Denk Önermeler

İki önermenin aynı doğruluk değeri almasına denklik ya da eşdeğerlilik denir. p ve q önermelerinin doğruluk değerleri aynı ise bu durum $p \equiv q$ şeklinde gösterilir ve “ p denktir q ” şeklinde okunur.

p : “Bir yıl 4 mevsimdir.”

q : “En küçük pozitif sayı 3’tür.”

r : “Ankara Karadeniz bölgesinde değildir.”

s : “4’in karesi 10’dur.”

p ve r önermesi doğrudur. q ve s önermeleri yanlıştır.

$p \equiv 1$, $r \equiv 1$, $q \equiv 0$, $s \equiv 0$ olduğu için denk önermeler $p \equiv r$ ve $q \equiv s$ olarak bulunur.

Bir Önermenin Değili (Olumsuzu)

Bir önermenin değili, o önermenin doğruluk değerinin değiştirilmiş şeklidir. Yani doğru ise yanlış, yanlış ise doğru yapılmasıdır.

Bir önerme doğru ise değili yanlış, yanlış ise değili doğru olur.

1’in değili 0’dır. $\rightarrow 1' \equiv 0$

0’ın değili 1’dir. $\rightarrow 0' \equiv 1$

Bir önermenin değilinin değili kendisidir. $\rightarrow (p')' \equiv p$

p : “8 sayısı çift bir sayıdır.” önermesi doğrudur. $p \equiv 1$

p' : “8 sayısı çift bir sayı değildir.” önermesi yanlıştır. $p' \equiv 0$

q : “YAZ kelimesi 4 harflidir.” önermesi yanlıştır. $q \equiv 0$

q' : “YAZ kelimesi 4 harfli değildir.” önermesi doğrudur. $q' \equiv 1$

Bileşik Önermeler

ki veya daha fazla önermenin ve, veya, ya da, ise, ancak ve ancak bağlaçları ile birleştirilmesiyle elde edilen yeni önermelere **bileşik önerme** denir.

Ve Bağlacı (\wedge)

p ile q önermelerinin “ve” bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen bileşik önermeye p ve q önermesi denir ve $p \wedge q$ biçiminde gösterilir.

$p \wedge q$ Doğruluk Tablosu

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$p \wedge q$ önermesi, önermelerin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

Örnek

p: “7 asal sayıdır.” önermesi doğrudur. ($p \equiv 1$)

q: “7 çift sayıdır.” önermesi yanlıştır. ($q \equiv 0$)

$p \wedge q$: “7 asal sayıdır ve çift sayıdır.” önermesi yanlıştır. ($p \wedge q \equiv 0$)

Özellikleri

Tek Kuvvet Özelliği: Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ olur.

Tabloda sütunlardan $p \wedge p \equiv p$ denliğini görebilirsiniz.

“ve” Bağlacı Tek Kuvvet Özelliği

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

Değişme Özelliği: Her p ve q önermeleri için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ olur.

tabloda gri sütunlardan $p \wedge q \equiv q \wedge p$ denliğini görebilirsiniz.

“ve” Bağlacı Değişme Özelliği

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Birleşme Özelliği: Her p, q, r önermesi için $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ olur.

tabloda gri sütunlardan $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ denliğini görebilirsiniz.

“ve” Bağlacı Birleşme Özelliği

p q r $p \wedge q$ $q \wedge r$ $(p \wedge q) \wedge r$ $p \wedge (q \wedge r)$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Dağılma Özelliği: Her p, q ve r önermeleri için “ve” bağlacının “veya” üzerine dağılma özelliği aşağıdaki gibidir.

→ “ve” bağlacının “veya” bağlacı üzerine soldan dağılma özelliği

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

→ “ve” bağlacının “veya” bağlacı üzerine sağdan dağılma özelliği

$$(q \vee r) \wedge p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Veya Bağlacı (V)

p ile q önermelerinin “veya” bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen bileşik önermeye p veya q önermesi denir ve p V q biçiminde gösterilir.

p V q Doğruluk Tablosu

p	q	p V q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p V q önermesi, önermelerin her ikisi de yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

Örnek

p: “Konya bir ildir.” önermesi doğrudur. ($p \equiv 1$)

q: “Konya başkenttir.” önermesi yanlıştır. ($q \equiv 0$)

p V q: “Konya bir ildir veya başkenttir.” önermesi doğrudur. ($p \vee q \equiv 1$)

Özellikleri

Tek Kuvvet Özelliği: Her p önermesi için $p \vee p \equiv p$ olur.

“veya” Bağlacı Tek Kuvvet Özelliği

p p p V p

1	1	1
0	0	0

Değişme Özelliği: Her p ve q önermeleri için $p \vee q \equiv q \vee p$ olur.

“veya” Bağlacı Değişme Özelliği

p q p V q q V p

1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Birleşme Özelliği: Her p, q, r önermesi için $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ olur.

“veya” Bağlacı Birleşme Özelliği

p q r pVq qVr (pVq)Vr pV(qVr)

1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1

1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Dağılma Özelliği: Her p, q ve r önermeleri için “veya” bağlacının “ve” üzerine dağılma özelliği aşağıdaki gibidir.
→ “veya” bağlacının “ve” bağlacı üzerine soldan dağılma özelliği

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

→ “veya” bağlacının “ve” bağlacı üzerine sağdan dağılma özelliği

$$(q \wedge r) \vee p \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Ya Da Bağlacı

p ile q önermelerinin “ya da” bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen bileşik önermeye **p ya da q önermesi** denir ve **p \vee q** biçiminde gösterilir.

p \vee q önermesi, önermelerin doğruluk değerleri farklı iken doğru, aynı iken yanlıştır. Ya da bağlacı doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p \vee q Doğruluk Tablosu

p	q	p \vee q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Değişme Özelliği

Her p ve q önermeleri için **p \vee q \equiv q \vee p** olur.

Birleşme Özelliği

Her p, q, r önermesi için **(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)** olur.

De Morgan Kuralları

De Morgan kuralı “ve”, “veya” bağlaçları ile bağlanmış iki önermenin değil’ini indirgemek için kullanılan bir ilişkidir.

Buna göre “p veya q önermesinin değil” “p’nin değil ile q’nun değilinin evetlenmesine”, “p ve q’nun değil” “p’nin değil ile q’nun değilinin veya’lanmasına” eşittir.

$$p \vee q \text{ nun değil} \rightarrow (p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

$$p \wedge q \text{ nun değil} \rightarrow (p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

şeklinde verilen kurallara De Morgan Kuralları denir.

İse Bağlacı (\Rightarrow)

Bir tek durum dışında (p \Rightarrow q) önermesinin doğruluk değeri her zaman doğrudur. Koşullu önermenin yanlış olduğu durum p \equiv 1 iken q \equiv 0 olduğu halidir.

p \Rightarrow q Doğruluk Tablosu

p q p \Rightarrow q

1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p \Rightarrow q önermesi p doğru, q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

Örnek

$(p \Rightarrow q) \vee q$ önermesinin doğruluk değerini bulalım.

$$\equiv (p' \vee q') \vee q \text{ [isenin veya denkliği uygulandı]}$$

$$\equiv p' \vee (q' \vee q) \text{ [birleşme özelliği uygulandı]}$$

$$\equiv p' \vee 1$$

$$\equiv 1$$

p ve q önermeleri ile oluşturulan $p \Rightarrow q$ koşullu önermesine göre:

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$,

$p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$,

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ olur.

Ancak ve Ancak Bağlacı (\Leftrightarrow)

p ile q önermelerinin “ancak ve ancak” bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen bileşik önermeye iki yönlü koşullu önerme denir ve $p \Leftrightarrow q$ (p ancak ve ancak q) biçiminde gösterilir.

$p \Leftrightarrow q$ Doğruluk Tablosu

p q $p \Leftrightarrow q$

1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$p \Leftrightarrow q$ önermesi önermeler aynı doğruluk değerine sahipken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

Örnek

Aşağıdaki önermeleri “ancak ve ancak” bağlacı ile birleştirelim.

p: “16 çift bir sayıdır.” ($p \equiv 1$)

q: “16 sayısı 2’ye tam bölünür.” ($q \equiv 1$)

$p \Leftrightarrow q$: “16 sayısı çift bir sayıdır ancak ve ancak 16’ye tam bölünür. ($p \Leftrightarrow q \equiv 1$)”

Açık Önerme ve Niceleyiciler

Açık Önerme

İçinde en az bir değişken bulunduran ve bu değişkenin aldığı değerlere göre doğru ya da yanlış hüküm bildiren önermelere **açık önerme** denir.

$x \equiv x < 3$ (Önerme tek değişkenli bir açık önermedir, x in tanım kümesi Doğal Sayılar olması durumunda; $x = 1$ ve $x = 2$ değerleri için P(1) in ve P(2) nin değeri doğru diğer x değerleri için yanlıştır)

$Q(x,y) \equiv x + 2 = y$ (İki değişkenli açık önerme, y lerin x ten farkı iki olduğu her x,y değeri için Q(x,y) doğru önermedir)

İçerisinde x gibi tek değişken bulunduran bir açık önerme $p(x)$, $q(x)$, ... ile x ve y gibi iki değişken bulunduran bir açık önerme ise $p(x, y)$, $q(x, y)$, ... biçiminde gösterilir. Bir açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine, o açık önermenin **doğruluk kümesi** denir.

Niceleyiciler

Günlük hayatta “her, hepsi, bazı, en az bir, hiçbiri” gibi sözcükleri kullanırız.

“Her akşam ay görünür.”

“Bazı zamanlar halsiz oluyor.”

Matematik ve mantıkta da bu niceleyiciler kullanılır ve sembolle gösterilirler.

Her (\forall) Niceleyicisi

“Her” sözcüğü bütün, hepsi, tamamı anlamına gelir. Her sözcüğü “ \forall ” sembolü ile gösterilir ve bu niceleyiciye **evrensel niceleyici** denir.

Bazı (\exists) Niceleyicisi

“Bazı” sözcüğü ile “en az bir” sözcüğü aynı anlama gelmektedir. Bazı sözcüğü “ \exists ” sembolü ile gösterilir ve bu niceleyiciye **varlıksal niceleyici** denir.

Çevirmeler

Sembolik Mantık Diline Çevirme

Çıkarımları sembolik bir dille denetlemek için geliştirilmiştir. Çıkarım, eldeki bilgilerden bir sonuç çıkarma işlemidir. Eldeki bilgilerden beklenen sonuçların çıkıp çıkmadığını araştırmaya denetleme denir.

Sembolik mantık günlük dildeki önermeleri semboller yardımıyla çok anlamlılığa ve belirsizliğe yer vermeden denetleyebilmeyi sağlar.

→ “Her tam sayı kendisinin karesinden küçüktür.”

$p(x)$: “ $\forall x$ tam sayısı için, $x < x^2$ ” şeklinde ifade edilir. Her niceleyicisi kullanıldığı için bu kurala uymayan herhangi bir tam sayının bulunması bu önermeyi yanlış yapar. 0 ve 1 sayıları karelerinden küçük değildir, karelerine eşittir. Bu yüzden $p \equiv 0$ olur.

→ “Bazı doğal sayıların 2 katı 10’dan büyüktür.”

$q(x)$: “ $\exists x$ doğal sayısı için, $2x > 10$ ” şeklinde ifade edilir. Bazı niceleyicisi kullanıldığı için bu kurala uyan en az bir doğal sayının bulunması bu önermeyi doğru yapar. 7 sayısının 2 katı 10’dan büyük olduğu için önerme doğrudur ve $q \equiv 1$ şeklinde gösterilir.

Sözel Olarak İfade Etme

Sembolik mantık diliyle verilen önermeleri sözel olarak ifade edebiliriz.

→ $r(x)$: “ $\forall x$ pozitif tam sayısı için, $x^2 > 0$ ”

Bu önerme “Her pozitif ve negatif tam sayının küpü 0’dan büyüktür.” şeklinde sözel olarak ifade edilir. Her pozitif ve negatif tam sayının karesi pozitif olduğu için önermenin doğruluk değeri $r \equiv 1$ olur.

→ $s(x)$: “ $\exists x$ doğal sayısı için, $x + 5 = 0$ ”

Bu önerme “Bazı doğal sayıların 5 fazlası 0’dır.” şeklinde ifade edilir. Bu önermeyi doğru yapacak değer olmadığı için $s \equiv 0$ şeklinde gösterilir.

Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat Kavramları

Tanım Nedir?

Bir terimi anlamları daha önceden bilinen terimler yardımıyla ifade etmeye **tanım** denir. İyi bir tanım, tanımlı ve tanımsız terimlerden yararlanmalı, herkes için açık, anlaşılır ve tutarlı olmalı, aynı türden kavramları kapsamalı, aynı türden olmayan kavramları dışarıda bırakmalıdır.

→ **Rakam**: “Sayıları ifade etmeye yarayan sembollere denir.”

Rakamın tanımı yapılırken sayı ve sembol terimleri kullanılmıştır.

→ **Denklem**: “İçinde değişken bulunan ve değişkene verilen bazı değerler için sağlanan eşitliktir.”

Aksiyom Nedir?

Mantık ve matematikte teorem ispatında öncül işlevi gören, doğruluğu açık ve seçik olarak belirli olan ve bu nedenle ispatına gerek duyulmayan önermelere **aksiyom** denir.

→ “Farklı iki noktadan yalnızca bir doğru geçer.”

→ “Bir doğal sayının ardışığı da doğal sayıdır.”

Teorem nedir?

Doğruluğu ispatlanması gereken önermelere **teorem** denir. Bir teoremin verilen kısmına hipotez (varsayım), ispatlanacak olan kısmına **hüküm (yargı)** denir.

$p \Rightarrow q$, bir teorem ise p , teoremin hipotezi, q ise hükmüdür.

İspat Nedir?

Bir teoremin hipotezinden hareketle hükmünün doğru olduğunu göstermeye teoremi **ispatlamak** denir. Teoremlerin ispatlanması için doğrudan ispat, çelişki yöntemi ile ispat, aksine örnek verme yöntemi ile ispat, karşıt ters yöntemi ile ispat, tümevarım gibi çeşitli ispat yöntemleri vardır.

2. ÜNİTE : KÜMELER

Kümelerde Temel Kavramlar

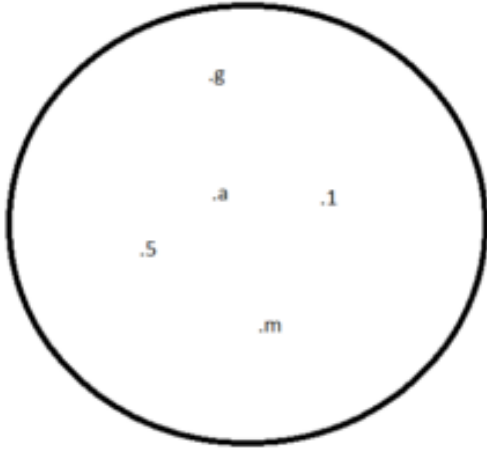
Küme Nedir?

Küme, matematiksel anlamda tanımsız bir kavramdır. Bu kavram “nesnelere topluluğu veya yığılı” olarak yorumlanabilir. Bu tanımdaki “nesne” soyut ya da somut bir şeydir; fakat her ne olursa olsun iyi tanımlanmış olan bir şeyi, bir eşyayı ifade eder. Örneğin, “Tüm canlılar topluluğu”, “Dilimiz alfabesindeki harflerin topluluğu”, “Masamın üzerindeki tüm kâğıtlar” tümcelerindeki nesnelere anlaşılabilir, belirgin oldukları, kısaca iyi tanımlı oldukları açıktır.

Eleman ve Eleman Sayısı: Kümeyi oluşturan her nesneye o kümenin elemanı denir. Elemanıdır sembolü \in ile gösterilir. Elemanı değildir sembolü \notin ile gösterilir. Bir A kümesinin eleman sayısı sembolle $s(A)$ şeklinde gösterilir.

Kümelerin Gösterilişi

Şema Yöntemi: Küme, kapalı bir eğri içinde her eleman bir nokta ile gösterilip noktanın yanına elemanın adı yazılarak (sol üstteki resim) gösterilir. Bu gösterime Venn Şeması ile gösterim denir.



Şekilde gördüğünüz küme A kümesi olsun .

Liste Yöntemi: Kümenin elemanları $\{ \}$ sembolü içine, her bir elemanın arasına virgül konularak yazılır.

A kümesi elemanlarını yazmak istersek şu şekilde olur; $A = \{g, a, 1, m, 5\}$.

Ortak Özellik Yöntemi: Kümeye ait elemanların tek tek yazılmak yerine ortak özelliklerinin yazılmasına ortak özellik yöntemi denir. Ortak özellik yöntemiyle kümelerin gösterimi şu şekildedir: $\{ x \mid x \text{’lerin ortak özelliği} \}$ Öyle ki anlamına gelen “ \mid ” sembolü yerine “ $:$ ” sembolü de kullanılabilir.

Örnek

$X = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$Y = \{ a, b, c, ç \}$

$Z = \{ 10, 11, 12, 13 \}$

Kümeler ortak özellik yöntemiyle farklı şekillerde de yazılabilir. Önemli olan yazılan kümenin tam olarak (ne eksik ne fazla) kümenin elemanlarını belirtmesidir.

$X = \{ a \mid a, \text{ bir rakam} \}$

$Y = \{ a : a, \text{ Alfabemizin ilk dört harfinden biri} \}$

$Z = \{ a : 9 < a < 14, a \text{ bir doğal sayı} \}$

Kümeler

Boş Küme: Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme $\{ \}$ veya \emptyset sembolleri ile gösterilir. Uyarı: $\{ \emptyset \}$ kümesi boş küme olmayıp bir elemana sahiptir.

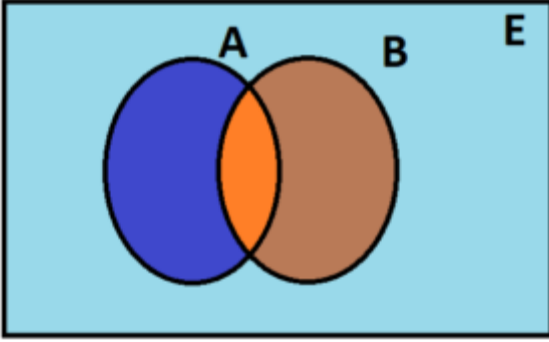
Eşit Küme ve Denk Küme: Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir. Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denir.

*A kümesi B kümesine eşit ise $A = B$ biçiminde gösterilir.

*C kümesi D kümesine denk ise $C \equiv D$ biçiminde gösterilir.

Not: Eşit olan kümeler aynı zamanda denktir. Fakat denk kümeler eşit olmayabilir.

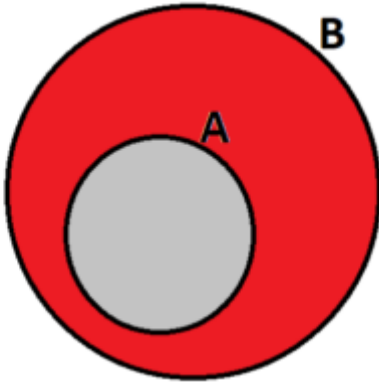
Evrensel Küme: Üzerinde işlem yapılan tüm kümelere ait elemanları içinde bulunduracak şekilde seçilen kümeye **evrensel küme** denir. Evrensel küme E harfi ile gösterilir.



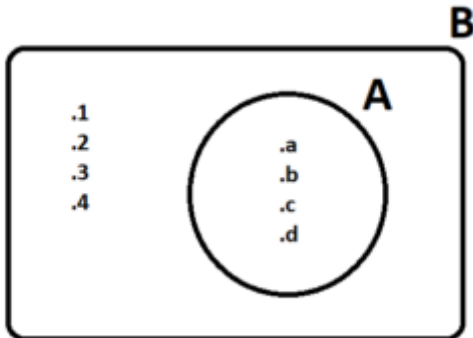
Sonlu ve Sonsuz Küme: Eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilebilen kümelere sonlu küme, edilemeyen kümelere **sonsuz küme** denir.

Alt Küme

A ve B iki küme olmak üzere A'nın her elemanı B'nin de elemanı oluyorsa, A'ya B'nin alt kümesi denir. B'ye de A'nın kapsayan kümesi denir. Her küme kendisinin bir alt kümesidir. Boş küme her kümenin alt kümesidir.



A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir ve $A \subset B$ ya da $A \subseteq B$ ile gösterilir. Bu durumda B kümesi A kümesini kapsar. Bu ifade ise $B \supset A$ ya da $B \supseteq A$ ile gösterilir.



Venn şemasında da görüldüğü gibi A kümesinin her bir elamanı B kümesinin içinde yer almaktadır. Bu durum “A kümesi B kümesinin alt kümesidir ($A \subset B$)” veya “B kümesi A kümesini kapsar, ($B \supset A$)” şeklinde ifade edilir.

Özellikleri

- *Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\emptyset \subset A$
- *Her küme evrensel kümenin alt kümesidir. $A \subset E$
- *Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subset A$
- *A, B ve C kümeleri için $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ ’dir.

Eleman sayısı n olan bir kümenin alt küme sayısı 2^n dir.

Öz Alt Küme Sayısı: Bir kümenin kendisi hariç alt kümelerine öz alt kümeleri denir. n elemanlı bir kümenin öz alt küme sayısı $2n - 1$.

Eşit Küme

Elemanları aynı olan kümelere **eşit küme** denir. A ve B kümelerinin eşitliği $A = B$ ile gösterilir.

$K = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 \}$ ve $L = \{ x \mid x, \text{ bir rakam} \}$ kümeleri eşit kümelerdir ve bu durum $K = L$ şeklinde gösterilir.

Eşit olmayan A ve B kümeleri $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Kümelerde İşlemler

Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşlemleri

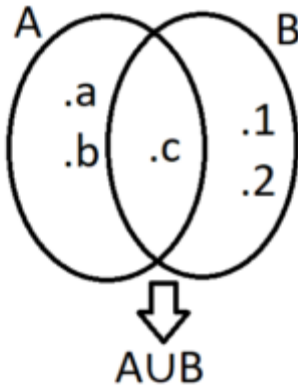
Birleşim İşlemi

A ve B herhangi iki küme olsun. A ve B kümelerinin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin “birleşim kümesi” denir. A ve B kümelerinin birleşim kümesi “ $A \cup B$ ” ile gösterilir, “A birleşim B” şeklinde okunur.

Kısaca; $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ veya } x \in B \}$ dir.

Örnek

$A = \{ a, b, c \}$ ve $B = \{ a, 2, c \}$ kümelerini Venn şemasında gösterelim.

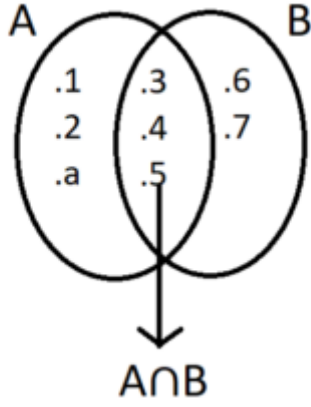


$$A \cup B = \{ 1, 2, a, b, c \}$$

Kesişim İşlemi

A ve B gibi iki kümenin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B'nin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ biçiminde gösterilir.

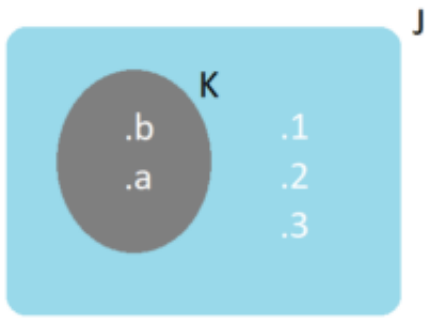
A ve B kümelerinin kesişimi ortak özellik yöntemi ile $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \}$ şeklinde ifade edilir.



$$A \cap B = \{ 3, 4, 5 \}$$

Örnek

Aşağıda verilen şemanın kesişim ve birleşimlerini gösterelim.



$$J \cap K = \{a, b\}$$

$$J \cup K = \{a, b, 1, 2, 3\}$$

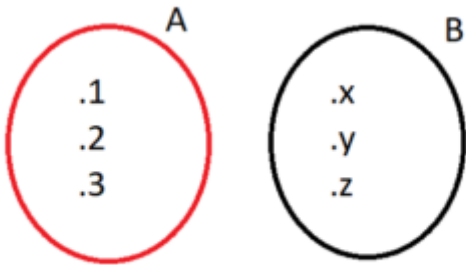
Biri diğerinin alt kümesi olan iki kümenin kesişimi kapsanan kümeye, birleşimi kapsayan kümeye eşittir.

$$s(K \cap J) = s(M) = 2$$

$$s(K \cup J) = s(S) = 5$$

Örnek

Aşağıda verilen şemanın kesişim ve birleşim kümelerini yazalım.



$$A \cap B = \{ \}$$

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, x, y, z \}$$

Kesişimleri boş küme olan kümelere **ayrık kümeler** denir. Ayrık iki kümenin birleşiminin eleman sayısı, kümelerin eleman sayıları toplamına eşittir.

A ve B ayrık kümeler ise $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

Kesişim ve Birleşim İşlemlerinin Özellikleri

Tek Kuvvet Özelliği:

Kesişim işleminin tek kuvvet özelliği vardır.

$$A \cap A = A$$

Birleşim işleminin tek kuvvet özelliği vardır.

$$A \cup A = A$$

Değişme Özelliği:

Kesişim işleminin değişme özelliği vardır.

$$A \cap B = B \cap A$$

Birleşim işleminin değişme özelliği vardır.

$$A \cup B = B \cup A$$

Birleşme Özelliği:

Kesişim işleminin birleşme özelliği vardır.

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Birleşim işleminin birleşme özelliği vardır.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Yutan ve Birim Eleman:

Kesişim işleminin yutan elemanı boş kümedir.

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Birleşim işleminin etkisiz elemanı boş kümedir.

$$A \cup \emptyset = A$$

Dağılma Özelliği:

Kesişim işleminin birleşim üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$$

Birleşim işleminin kesişim üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

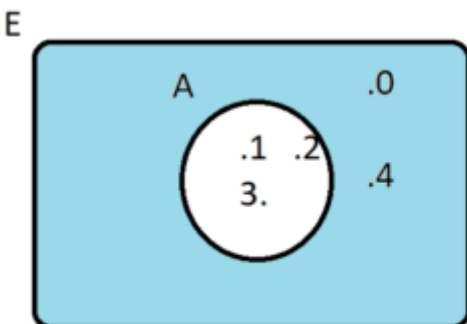
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$$

Kümelerde Fark ve Tümlenme İşlemleri

E evrensel küme olmak üzere A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleneni denir ve A' ile gösterilir.

A'nın tümleneni kümesi A' ortak özellik yöntemi ile $A' = \{ x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E \}$ şeklinde ifade edilir.



$$A' = \{ 0, 4 \}$$

$$(A')' = \{ 1, 2, 3 \} = A$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \} = E$$

$$s(A) \cup s(A') = 3 + 2 = 5 = s(E)$$

$$E \setminus A = \{ 0, 4 \} = A'$$

$$E' = \emptyset$$

Tümleme ile İlgili Özellikler

1) $(A')' = A$

Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni kendisidir.

2) $A \cap A' = \emptyset$

Bir kümenin tümleyeni ile kesişimi boş kümedir.

3) $A \cup A' = E$

Bir kümenin tümleyeni ile birleşimi evrensel kümedir.

4) $s(A) \cup s(A') = s(E)$

Bir kümenin eleman sayısı ile tümleyeninin eleman sayısının toplamı evrensel kümenin eleman sayısına eşittir.

5) $E \setminus A = A'$

Evrensel kümenin bir kümeden farkı o kümenin tümleyenidir.

6) $E' = \emptyset$

Evrensel kümenin tümleyeni boş kümedir.

7) $\emptyset' = E$

Boş kümenin tümleyeni evrensel kümedir.

Küme İşlemleri ile Sembolik Mantık Kuralları Arasındaki İlişki

SEMBOLİK MANTIK

KÜMELER

0	$\emptyset\emptyset$
1	E
\wedge	$\cap\cap$
\vee	$\cup\cup$
Değili (')	Tümleyeni (')
\equiv	=
$(p')' \equiv p$	$(A')' = A$
$p \wedge p' \equiv 0$	$A \cap \cap A' = \emptyset\emptyset$
$p \vee p' \equiv 1$	$A \cup \cup A' = E$
$1 \wedge 0 \equiv 0$	$E \cap \cap \emptyset\emptyset = \emptyset\emptyset$
$1 \vee 0 \equiv 1$	$E \cup \cup \emptyset\emptyset = E$

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

a ve b gibi iki eleman arasında virgül konularak (a, b) şeklinde yazılmasına sıralı ikili denir. (a, b) sıralı ikilisinde a'ya birinci bileşen, b'ye **ikinci bileşen** denir.

Örnek:

Aynı futbol takımında oynayan Ali, Sertaç ve Tamer, 7, 10 ve 11 numaralı formları giyebilirler. Bu oyuncuların seçebilecekleri formları gösteren sıralı ikilileri yazalım.

Cözüm

A kümesi $A = \{ \text{Ali}, \text{Sertaç}, \text{Tamer} \}$

B kümesi $B = \{ 7, 10, 11 \}$

$A \times B = \{ (\text{Ali}, 7), (\text{Ali}, 10), (\text{Ali}, 11), (\text{Sertaç}, 7), (\text{Sertaç}, 10), (\text{Sertaç}, 11), (\text{Tamer}, 7), (\text{Tamer}, 10), (\text{Tamer}, 11) \}$

Sıralı ikililerde bileşenlerin sırası önemlidir. $(a, b) \neq (b, a)$

Sıralı İkilerin Eşitliği

İki sıralı ikilinin birinci bileşenleri birbirlerine, ikinci bileşenleri de birbirlerine eşit ise bu sıralı ikiler eşittir.

(a, b) ve (c, d) sıralı ikilileri birbirine eşit ise bu durum $(a, b) = (c, d)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $a = c$ ve $b = d$ olur.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

$S(A)$; A kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

- $s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$
- $A \neq B$ ise $A \times B \neq B \times A$ değişme özelliği yoktur.
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ birleşme özelliği vardır.
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3. ÜNİTE : DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Sayı Kümeleri

Rakam, Sayı

Sayıları yazmak için kullanılan sembollere **rakam** denir. Bir çokluğu belirtmen için bir veya birden fazla rakamla yazılan ifadeye **sayı** denir.

Kullandığımız 10'luk sayı sisteminde rakamlar **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** olmak üzere 10 adettir.

1923, 100, 5 ve **81** birer sayıdır.

Doğal Sayılar

$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$ kümesine doğal sayılar kümesi denir ve "N" harfi ile isimlendirilir.

Sayma Sayıları

Sadece nesnelere saymaya yarayan sayılardır. 1, 2, 3, 4, ... diye ilerlerler ve bitmezler. Bir sonu yoktur sonsuzlardır.

Tam Sayılar

$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$ kümesine tam sayılar kümesi denir ve "Z" harfi ile isimlendirilir.

0'dan küçük tam sayılara negatif tam sayılar denir ve "Z⁻" ile gösterilir. $Z^- = \{ -1, -2, -3, \dots \}$

0'dan büyük tam sayılara pozitif tam sayılar denir ve "Z⁺" ile gösterilir. $Z^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

$Z = Z^- \cup \{ 0 \} \cup Z^+$

Rasyonel Sayılar

$$\frac{ab}{ab}$$

a ve b aralarında asal tam sayılar ve b sıfırdan farklı olmak üzere rasyonel sayılar kümesi denir ve "Q" harfi ile isimlendirilir.

şeklinde yazılabilen sayıların kümesine

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \text{ ve } \text{EBOB}(a,b) = 1 \right\}$$

0'dan küçük rasyonel sayılara negatif rasyonel sayılar denir ve "Q⁻" ile gösterilir.

0'dan büyük rasyonel sayılara pozitif rasyonel sayılar denir ve "Q⁺" ile gösterilir.

$$Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$$

$7 = \frac{7}{1}$ şeklinde yazılabildiği için doğal sayılar rasyonel sayıdır.

$-5 = \frac{-5}{1}$ şeklinde yazılabildiği için tam sayılar rasyonel sayıdır.

$0 = \frac{0}{1}$ şeklinde yazılabildiği için "0" rasyonel sayıdır.

$-1\frac{3}{4} = -\frac{85}{4}$ şeklinde yazılabildiği için kesirler rasyonel sayıdır.

$0,2 = \frac{2}{10}$ şeklinde yazılabildiği için ondalık sayılar rasyonel sayıdır.

$1.\overline{3} = 1,333\dots = \frac{129}{100}$ şeklinde yazılabildiği için devirli sayılar rasyonel sayıdır.

► $\frac{1}{0}$ ifadesinde paydada sıfır olduğu için rasyonel sayı değildir

İrrasyonel Sayılar

a ve b aralarında asal tam sayılar ve b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayıların kümesine irrasyonel sayılar kümesi denir ve "Q'" harfi ile isimlendirilir.

*Kök dışına tam olarak çıkamayan sayılar irrasyonel sayıdır.

*Ondalık açılımı sınırsız ve devirsiz olan sayılar irrasyonel sayıdır.

$\sqrt{15}$ kök dışına tam çıkamadığı için irrasyonel sayıdır.

$\sqrt{15} = 3,87298334\dots$ şeklinde sınırsız ve devirsiz olduğu için de irrasyonel sayıdır.

π sayısının ondalık açılımı $3,141592653\dots$ şeklinde sınırsız ve devirsiz olduğu için π sayısı irrasyonel bir sayıdır.

e sayısının ondalık açılımı $2,718281828259\dots$ şeklinde sınırsız ve devirsiz olduğu için e sayısı irrasyonel bir sayıdır.

$\frac{1}{0}$ ifadesinde paydada sıfır olduğu için irrasyonel sayı değildir, tanımsızdır.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Kavramlar

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun,

Bir eşitliğin her iki yanına aynı sayı eklenip çıkarılabilir. Bu durumda eşitlik değişmez.

$a = b$ ise $a+c = b+c$ ve $a - c = b - c$ olur.

Bir eşitliğin her iki yanı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılabilir. Bu durumda eşitlik değişmez.

$a=b$ ise $a.c = b.c$ olur.

a ve b gerçek sayı ve a sıfırdan farklı olmak üzere $ax+b=0$ ifadesine **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir. Denklemi sağlayan x değerine denklemin kökü ve bu değerlerin oluşturduğu kümeye de denklemin **çözüm kümesi** denir.

$x - 2 = 3$ denklemini sağlayan tek bir x değeri vardır ve bu değer 5'tür.

Cözüm

$$x = 3 + 2$$

$$x = 5$$

Denklemin kökü: 5

Çözüm kümesi: $\mathcal{C} = \{ 5 \}$

Denklemler Çözülürken İzlenecek Yollar



Denklem çözerken:

Eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir.

Eşitliğin her iki tarafından aynı sayı çıkartılabilir.

Eşitliğin her iki tarafı aynı sayı ile çarpılabilir.

Eşitliğin her iki tarafı aynı sayıya bölünebilir.

Bu işlemleri daha pratik yapmak için:

+ işaretli terimler eşitliğin diğer tarafına - işaretli olarak geçer.

- işaretli terimler eşitliğin diğer tarafına + işaretli olarak geçer.

Çarpım durumundaki katsayı eşitliğin diğer tarafına bölüm olarak geçer.

Bölüm durumundaki katsayı eşitliğin diğer tarafına çarpım olarak geçer.

Denklem Çözümleri

Örnek

$3x - 5 = x + 5$ denklemini çözelim.

Bilinmeyenleri eşitliğin bir tarafına, diğer sayıları diğer tarafa toplarız.

$$3x - x = 5 + 5 \text{ (-5 sağa +3 olarak geçer, x sola -x olarak geçer.)}$$

$$2x = 10 \text{ (x'in başındaki 2 katsayısını karşıya bölü olarak geçer.)}$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Örnek

$2(3x - 5) = 8 - 3(x + 4)$ denklemini çözelim.

$$6x - 10 = 8 - 3x - 12 \text{ (Parantez önlerindeki 2 ve -3 parantezlere dağıtılır.)}$$

$$6x + 3x = 8 - 12 + 10 \text{ (-3x sola +3x olarak, -10 sağa +10 olarak geçer.)}$$

$$9x = 6 \text{ (x'in başındaki 9 katsayısını karşıya bölü olarak geçer.)}$$

$$x = \frac{6}{9}$$

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Kavramlar

$>$ (büyüktür), \geq (büyüktür veya eşittir), $<$ (küçüktür), \leq (küçüktür veya eşittir) sembolleri ile yazılan matematiksel ifadelerle eşitsizlik denir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere;

$$ax + b > 0$$

$$ax + b \geq 0$$

$$ax + b < 0$$

$$ax + b \leq 0$$

şeklindeki eşitsizliklere x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

Eşitsizliklerin derecesi, değişkenin kuvvetine bağlıdır.

$6x + 3 > 5$ ve $2\pi/3 - 12 \leq 30$ eşitsizlikleri birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliktir.

$x^2 < 16$ ve $\sqrt{\pi} + 1 \leq 9$ eşitsizlikleri birinci dereceden eşitsizlik değildir.

Bir eşitsizlikte değişkenin (x) eşitsizliği sağlayan değer aralığını bulmaya eşitsizlik çözmek denir.

Değişkenin (x) eşitsizliği sağlayan değer aralığına çözüm kümesi adı verilir ve genelde \mathbb{C} harfi ile gösterilir.

Eşitsizliklerin Özellikleri

1. Eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayıyı eklememiz veya her iki tarafından aynı sayıyı çıkarmamız gerekebilir, bu durumda eşitsizlik bozulmaz yani eşitsizliğin yönü değişmez.
2. Eşitsizliğin her iki tarafını aynı sayı ile çarpmamız veya her iki tarafını aynı sayıya bölmemiz gerekebilir.

*Bir eşitsizliğin her iki tarafını pozitif bir sayı ile çarparsak veya her iki tarafını pozitif bir sayıya bölersek eşitsizlik bozulmaz, yönü değişmez.

*Bir eşitsizliğin her iki tarafını negatif bir sayı ile çarparsak veya her iki tarafını negatif bir sayıya bölersek eşitsizlik bozulur, yönü değişir.

Eşitsizlik yön değiştirdiğinde < sembolü yerine > sembolü, > sembolü yerine < sembolü, ≤ sembolü yerine ≥ sembolü ve ≥ sembolü yerine ≤ sembolü gelir.

Örnek

$2x+5 < 25$ eşitsizliğini çözelim.

Cözüm

Bu eşitsizliği çözmek için bilinmeyen olan x 'i eşitsizliğin herhangi bir tarafında yalnız başına elde etmeliyiz. Bunun için önce $+5$ 'ten kurtulmamız gerekiyor. $+5$ 'ten kurtulmak için eşitsizliğin her iki tarafından 5 çıkarmalıyız.

$$2x+5-5 < 25-5$$

$2x < 20$ Şimdi de x 'in önündeki 2 'den kurtulmak için her iki tarafı 2 'ye bölmeliyiz.

$$2x : 2 < 20 : 2$$

$x < 10$ x 'i yalnız başına elde ettiğimize göre eşitsizliği çözdük.

Örnek

$2x - 5 > x - 2$ eşitsizliğini çözelim.

Cözüm

$2x - 5 > x - 2$ (Eşitsizliğin her iki tarafından x çıkartılır.)

$x - 5 > -2$ (Eşitsizliğin her iki tarafına 5 eklenir.)

$$x > 3$$

Çözüm kümesi $(3, \infty)$ olarak bulunur.

Sayı Doğrusunda Gösterme

Verilen bir eşitsizliğin çözüm kümesini gerçek sayılarda aralık kavramı konusunda anlatıldığı şekilde sayı doğrusunda gösterilir.

Örnek

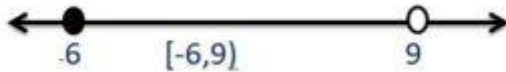
$-9 \leq 2x + 3 < 21$ eşitsizliğini çözelim ve çözüm kümesini sayı doğrusunda gösterelim.

$$-9 \leq 2x + 3 < 21$$

$$-12 \leq 2x < 18$$

$$-6 \leq x < 9$$

Çözüm kümesi $[-6,9)$ olarak bulunur.



Örnek

$2x - 4 < x - 1 \leq 3x + 7$ eşitsizliğini çözelim ve çözüm kümesini sayı doğrusunda gösterelim.

Eşitsizliğin üç tarafında farklı katsayılarla sahip olan bu tür eşitsizliklerin çözüm iki parça halinde yapılır ve bulunan kümelerin kesişimi alınır.

1. KISIM

$$2x - 4 < x - 1$$

$$x < 3$$

2. KISIM

$$x - 1 \leq 3x + 7$$

$$-8 \leq 2x$$

$$-4 \leq x$$

Bu iki eşitsizliğin ($-4 \leq x$ ve $x < 3$) kesişimi $-4 \leq x < 3$ olur.

Çözüm kümesi $[-4,3)$ olarak bulunur.



Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

Kavramlar

a , b ve c sabit gerçek sayılar, a ve b sıfırdan farklı olmak üzere, x ve y değişkenleri için $ax + by = c$ şeklinde yazılan ifadeler **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

Değişkenleri birinci dereceden ve aynı olan birden fazla denklem grubuna ise **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Bir denklem sisteminin çözüm kümesi, bu iki denklemi aynı anda sağlayan (x, y) sıralı ikilileridir.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemlerin Grafikleri

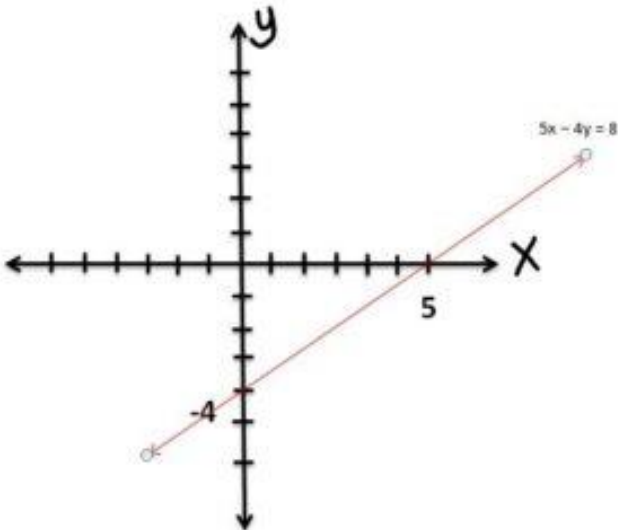
Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin grafikleri koordinat sisteminde bir doğru belirtir. Bu doğru, denklemi sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin temsil ettiği noktalardan geçer.

Örnek

$5x - 4y = 8$ denkleminin grafiğini çizelim.

Doğrunun eksenleri kestiği noktaları buluruz. Bu noktaları koordinat sisteminde işaretleyerek grafiği çizeriz.

x	y	(x, y)
0	-4	(0, -4)
5	0	(5, 0)



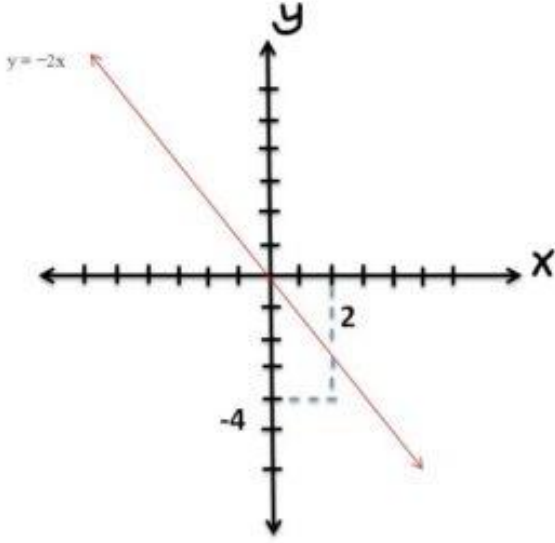
Örnek

$y = -2x$ denkleminin grafiğini çizelim.

Bu doğru orijinden geçer. Geçtiği ikinci noktayı isteğimize göre belirleyebiliriz. Bu noktaları koordinat sisteminde işaretleyerek grafiği çizeriz.

x	y	(x, y)
---	---	--------

0	0	(0 , 0)
2	-4	(2 , -4)



Denklem Sistemi Çözümü

Bir denklem sisteminin çözüm kümesini sıralı ikilileri tek tek yerine koyarak belirlemek her zaman mümkün olmayabilir. Denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için yerine koyma, yok etme, grafik çizme gibi matematiksel yöntemler kullanılır.

Yerine Koyma Yöntemi

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

denklem sisteminin yerine koyma yöntemi ile çözümünde; birinci ya da ikinci denklemde x ya da y değişkeni yalnız bırakılarak, elde edilen ifade diğer denklemde yerine yazılır.

Yerine Koyma Yöntemiyle denklem sistemini çözerken genellikle katsayısı 1 olan değişken diğer değişken türünden ifade edilir.

Yok Etme Yöntemi

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

denklem sisteminin yok etme yönteminde her iki denklem taraf tarafa toplanarak bilinmeyenlerden birisi yok edilir. Verilen denklem sisteminde taraf tarafa toplama işlemi ile bilinmeyenlerden birisi yok olmuyorsa, çarpma işlemi ile bilinmeyenlerden birisinin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir.

Çözüm Kümesi – Katsayı İlişkisi

$ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ denklemlerinden oluşan denklem sisteminin kökleri ve dolayısıyla çözüm kümesi katsayıların (a, b, c, d, e, f) oranı ile ilişkilidir.

1) Çözüm Kümesinin Tek Elemanlı Olması

$ax + by + c = 0$
 $dx + ey + f = 0$ denklem sisteminde

$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise denklem sistemini sağlayan yalnız bir (x, y) ikilisi vardır.

Doğrular bir noktada kesişir.

2) Çözüm Kümesinin Boş Küme Olması

$ax + by + c = 0$
 $dx + ey + f = 0$ denklem sisteminde

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{f}{c}$ ise denklem sistemini sağlayan (x, y) ikilisi yoktur. Çözüm kümesi boş kümedir. \emptyset

Doğrular paraleldir, kesişmez.

3) Çözüm Kümesinin Sonsuz Elemanlı Olması

$ax + by + c = 0$
 $dx + ey + f = 0$ denklem sisteminde

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{f}{c}$ ise denklem sistemini sağlayan sonsuz (x, y) ikilisi vardır.

Doğrular çakışiktır.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Kavramlar

$>$ (büyüktür), \geq (büyüktür veya eşittir), $<$ (küçüktür), \leq (küçüktür veya eşittir) sembolleri ile yazılan matematiksel ifadelere **eşitsizlik** denir.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a, b \neq 0$ olmak üzere;

$$ax + by + c > 0$$

$$ax + by + c \geq 0$$

$$ax + by + c < 0$$

$$ax + by + c \leq 0$$

şeklindeki eşitsizliklere x ve y değişkenine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik denir.

Bir eşitsizliğin birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik olabilmesi için iki değişken içermesi ve değişkenlerin kuvvetinin 1 olması gerekir.

Örnek

$3x + y > 6$ ve $y - 3x \leq 5$ eşitsizlikleri birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizliklerdir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikleri sağlayan x ve y gerçek sayıları (x, y) sıralı ikilisi olarak yazılır. Bu sıralı ikililerden her biri eşitsizliğin çözüm kümesinin bir elemanıdır.

Örnek

$x + y \geq 3$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) sıralı ikililerini bulalım.

$$3 + 0 \geq 3 \text{ doğru olur: } (3, 0)$$

$1 + 5 \geq 3$ doğru olur: (1, 5)

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Grafikleri

Birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizliklerin grafikleri koordinat sisteminde bir bölge belirtir. Bu bölge, eşitsizliği sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin temsil ettiği noktalardan oluşur.

Örnek

$y \leq 2x - 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini kartezyen düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$y = 2x - 1$ doğrusu görüldüğü gibi düzlemi iki bölgeye ayırmaktadır. $y < ya da y \leq$ dendiğinde doğrunun alt tarafı, $y > ya da y \geq$ sorulduğunda da üst tarafını tarayacağız. $y \leq 2x - 1$ dendiği ve eşitliğin geçerli olduğu noktalar da istendiğinden doğruyu kesikli çizgi ile değil normal çiziyoruz. [note3] $y \leq ax + b$ durumunda neden alt tarafı taradığımız anlaşılmadıysa, doğrunun üstünde bir nokta düşünelim. Bu noktanın y si için $y = 2x - 1$ ilişkisi geçerlidir. x i değiştirmeden y yi küçültmek için aşağı yönlü gitmeliyiz.

Eşitsizlik Sistemleri

Verilen bir eşitsizlik sisteminin çözümü bulunurken

Her bir eşitsizliğin çözüm aralığı bulunur. Bulunan çözüm aralıklarının kesişim kümesi bulunur. Bu kesişim kümesi eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

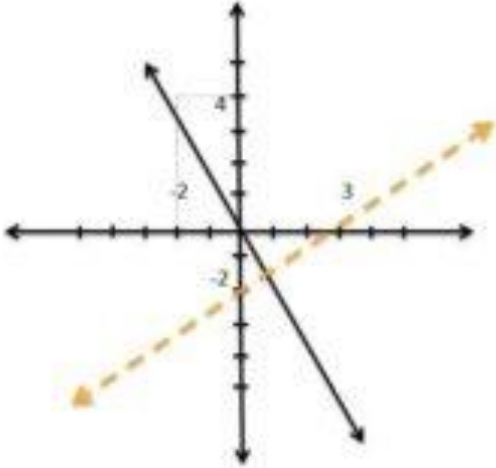
Örnek

Aşağıdaki eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterelim.

$$y \geq -2x$$

$$2x - 3y < 6$$

$y \geq -2x$ eşitsizliğinin çözüm kümesi , $2x - 3y < 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesi gösterilmiştir.

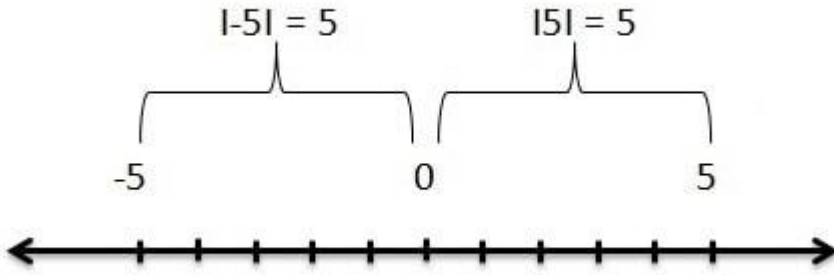


Mutlak Değer

Mutlak Değer Nedir?

Mutlak değer bir gerçek sayının işaretli değerini verir. Örneğin, 3; hem 3'ün hem de -3'ün mutlak değeridir. x gerçek sayısının mutlak değeri $|x|$ şeklinde gösterilir.

5 ve -5 sayısının 0'a olan uzaklığı 5 birimdir. Bu durum sembolle $|5| = 5$ ve $|-5| = 5$ şeklinde gösterilir.



Örnek

$x < 0$ olmak üzere;

$$3|x| - |2x| - x$$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$x < 0$ olduğundan $2x < 0$ dir.

$$3|x| - |2x| - x = 3 \cdot (-x) - (-2x) - x$$

$$= -3x + 2x - x$$

$$= -2x \text{ tir.}$$

Mutlak Değer Sembolünden Kurtulma

a ve b reel sayılar olmak üzere

1. $a > 0$ iken

$$|a| = a \text{ dir.}$$

$$|-a| = -(-a) = a \text{ dir.}$$

2. $a < 0$ iken

$$|a| = -a \text{ dir.}$$

$$|-a| = -a \text{ dir.}$$

3. $a < b$ iken

$$a < b \Rightarrow a - b < 0$$

$$|a - b| = -(a - b) = -a + b \text{ dir.}$$

4. $a < b$ iken

$$a < b \Rightarrow 0 < b < -a$$

$$|b - a| = b - a \text{ dir.}$$

♦ Mutlak değer in iç i pozitif iken içerdeki ifade dışarıya olduğu gibi çıkar.

♦ Mutlak değer in iç i negatif iken içerdeki ifade dışarıya önüne (-) işaret alarak çıkar.

Mutlak Değer in Özellikleri

1. Her x reel sayısı için

$$|x| = |-x| \text{ tir.}$$

2. Her x,y reel sayıları için

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

3. $y \neq 0$ olmak üzere her x,y reel sayıları için

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

4. x reel sayısı için

$$|x^n| = |x|^n$$

5. a pozitif bir reel sayı olmak üzere

$|x|=a$ ise $x=a$ veya $-x=-a$ 'dır.

Örnek-1:

$$|3x + 3| = 18$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$|3x + 3| = 18$$

$$3x + 3 = 18$$

$$3x + 3 = -18$$

$$3x = 18 - 3$$

$$3x = -18 - 3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{3x}{3} = -\frac{21}{3} = -7$$

x değerleri toplamı $-7+5=-2$ dir.

Örnek-2:

$x < 0$ olduğuna göre

$$|2x-1| - |1-x| + |-2x|$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} & \overset{-}{|2x-1|} - \overset{+}{|1-x|} + \overset{-}{|-2x|} \\ & = -2x + 1 - (1 - x) - 2x \\ & = -4x + 1 - 1 + x \\ & = -3x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere

1. $|x|=a$ ise

$-a < x < a$ dır.

2. $|x|>a$ ise

$a > x$ $x < -a$ dır.

3. $a < |x| < b$ ise

$a < x < b$ veya $a < -x < b$ dir.

Örnekler

Örnek-1:

$|x+3| \geq 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$|x + 3| \geq 7$$

$$x + 3 \geq 7 \quad x + 3 \leq -7$$

$$x \geq 4 \quad x \leq -10$$

Bu durumda x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı;

$$x \leq -10 \quad x \geq 4$$

..., -12, -11, -10 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39 \text{ dur.}$$

Örnek-2:

$|x - 2| \leq 3$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |x - 2| \leq 3 &\text{ ise } -3 \leq x - 2 \leq 3 \\ -3 + 2 &\leq x - 2 + 2 \leq 3 + 2 \\ -1 &\leq x \leq 5 \end{aligned}$$

Buna göre, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $[-1, 5]$ olur.

Üslü İfadeler

Bir sayının yan yana iki kez yazılıp çarpılmasına **o sayının karesi** denir.

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

Bir sayının yan yana üç kez yazılıp çarpılmasına **o sayının küpü** denir.

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

Üslü Sayıların Özellikleri

a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

1. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

üslü bir ifadenin üssü alınırken üsler çarpılır

Örnekler:

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

$$(-2^2)^4 = (+2^{2 \cdot 4}) = 2^8$$

$$(8^1)^{14} = (3^4)^{14} = 3^{14 \cdot 4} = 3^56$$

2. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Örnekler:

$$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9$$

$$(-4 \cdot 3)^3 = (-4)^3 \cdot (3^3) = -64 \cdot 27$$

3. $a^{-m} = 1/a^m$ $(a \cdot b)^{-m} = (b/a)^m$ dir.

Örnekler:

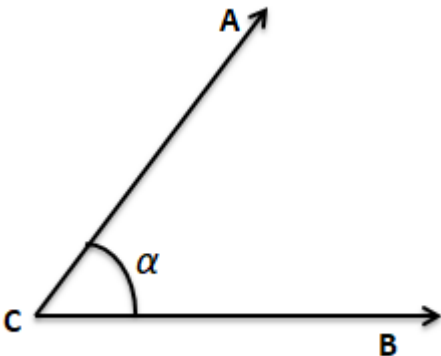
$$3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$$

4. ÜNİTE : ÜÇGENLER

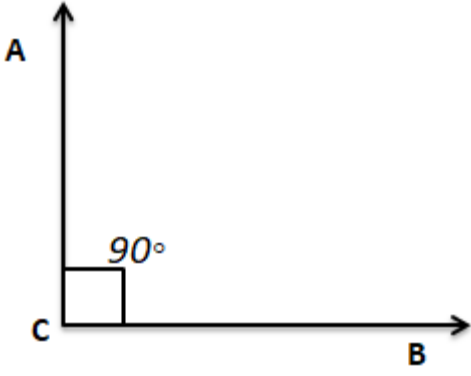
Üçgenlerde Temel Kavramlar

Üçgende Açılar

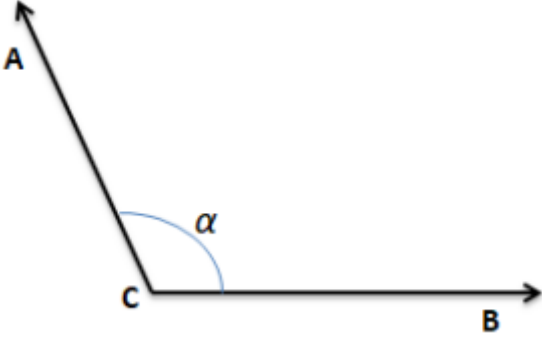
Dar Aç: Büyüklüğü 0 ile 90 derece arasında olan açıdır.



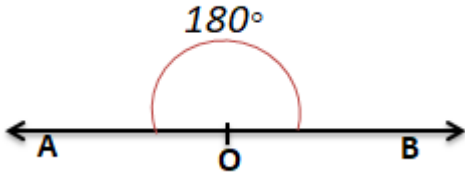
Dik Aç: Büyüklüğü 90 derece olan açıdır.



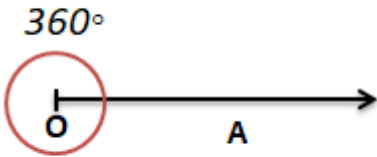
Geniş Açı: Büyüklüğü 90 ile 180 derece arasında olan açıdır.



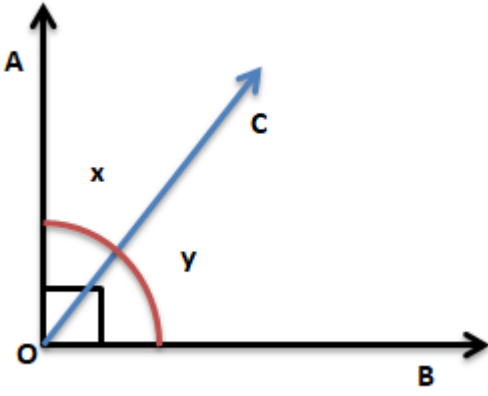
Doğru Açı: Büyüklüğü 180 derece olan açıdır.



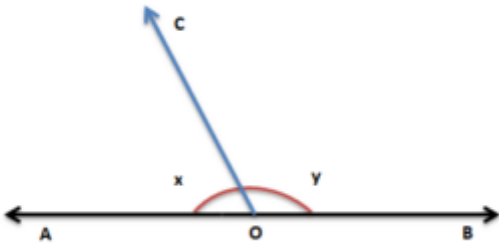
Tam Açı: Büyüklüğü 360 derece olan açıdır.



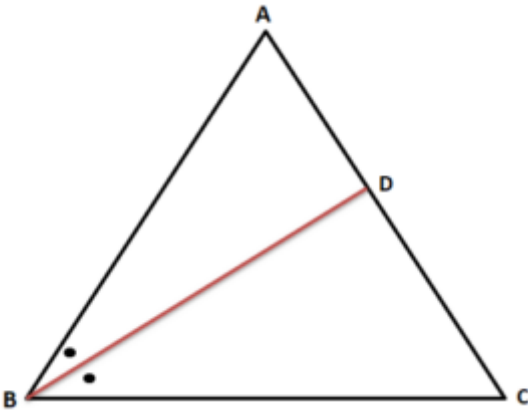
Tümler Açılar: Toplamları 90 derece olan açılardır. Örneğin 50 derece olan bir açının tümleri(tümler açısı) 40 derecedir.



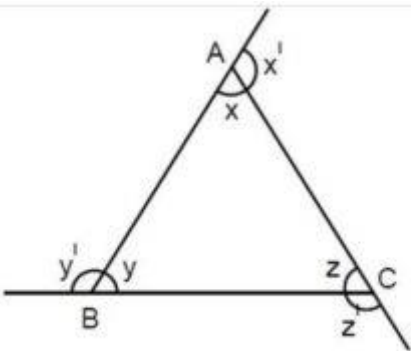
Bütünler Açılar: Toplamları 180 derece olan açılardır. Örneğin 110 derece olan bir açının bütünleri(bütünler açısı) 70 derecedir.



Bir açığı iki eş açığa ayıran ışına **açıortay** denir.



Üçgenin Açıları

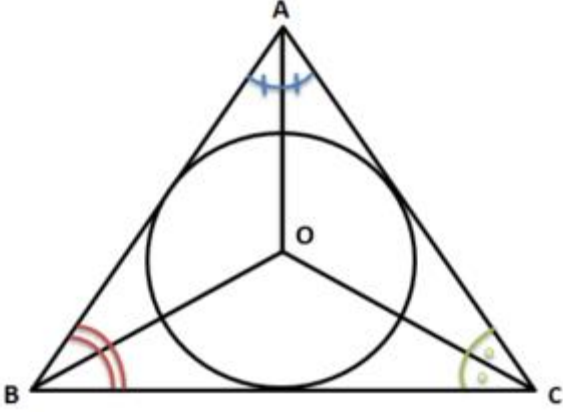


- Bir üçgenin iç açı ölçüleri toplamı 180° dir.
- Bir üçgenin dış açı ölçüleri toplamı 360° dir.

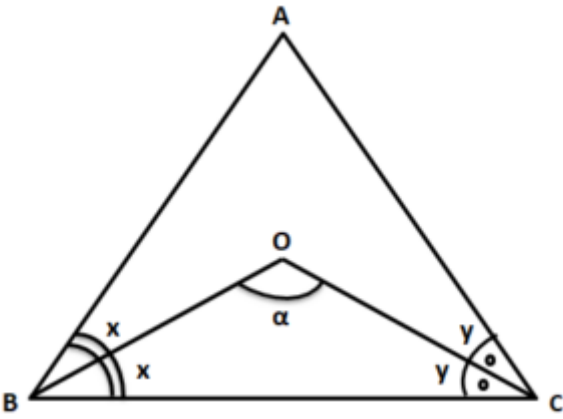
-Bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamı kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşittir.

Bir üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

Üçgende Açortay Özellikleri



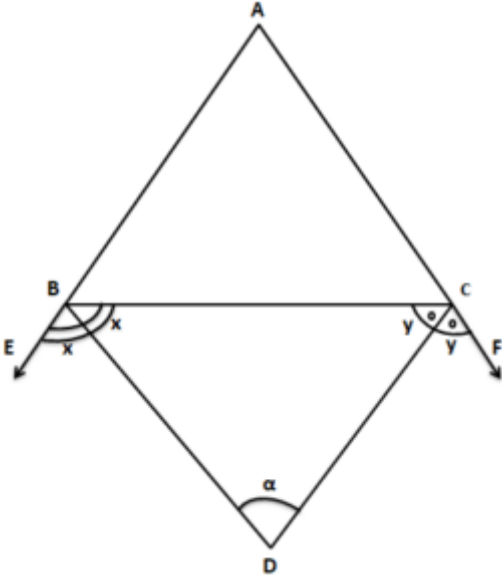
Bir üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir. Bu nokta, üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.



Bir üçgende iki iç açıortay arasındaki açının ölçüsü, açıortayı çizilmeyen açı ölçüsünün yarısından 90 derece fazladır.

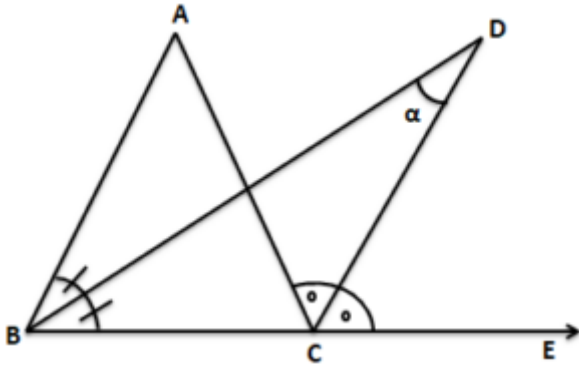
$$\alpha = 90^\circ + \frac{m(\hat{A})}{2}$$

Bu kuralı uygulayacağımız sorular karşımıza çok çıkar bu yukarıdaki formülü kullanarak çözüme ulaşabilirsiniz.



Bir üçgende iki dış açıortay arasındaki açının ölçüsü ile açıortayı çizilmeyen iç açı ölçüsünün yarısı, birbirinin tümleridir.

$$\alpha = 90 - \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ formülü ile } \alpha \text{ açısı bulunur.}$$

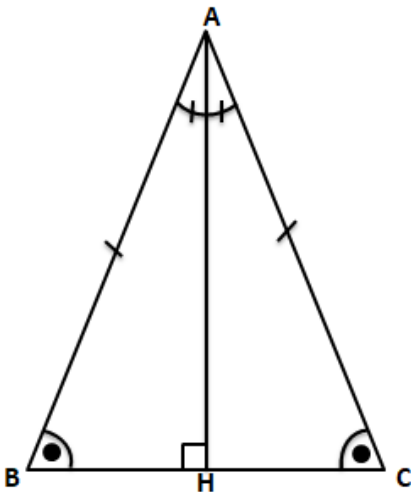


Bir üçgende bir köşenin iç açıortayı ile diğer bir köşenin dış açıortayı arasındaki açının ölçüsü, açıortayı çizilmeyen köşenin iç açı ölçüsünün yarısıdır.

$$\alpha = \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ formülü ile } \alpha \text{ açısı bulunur.}$$

İkizkenar Üçgen

Herhangi iki kenar uzunluğu birbirine eşit olan üçgene **ikizkenar üçgen** denir.



Özellikleri

ABC üçgeninde [BC] taban, [AB] ve [AC] yan kenarlardır.

\hat{A} tepe açısı, \hat{B} ve \hat{C} taban açılarıdır.

$|AB| = |AC|$

$m(\hat{B}) = m(\hat{C})$

İkizkenar üçgende tabana ait yükseklik, hem açıortay hem de kenarortaydır.

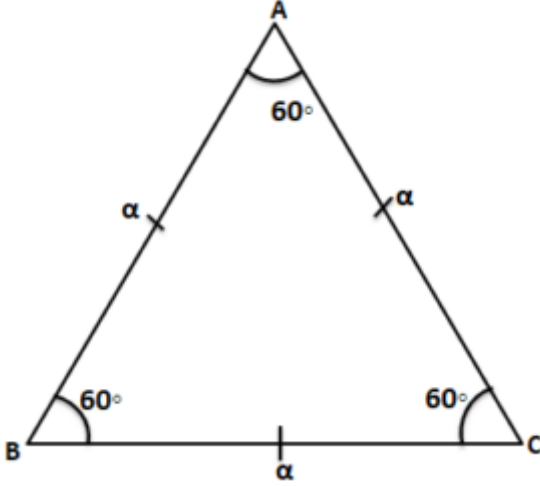
$[AH] \perp [BC]$ ise

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{CAH})$

$|BH| = |CH|$

Eş Kenar Üçgen

Üç kenarının uzunluğu, eşit olan üçgenlere **eşkenar üçgen** denir.



Özellikleri

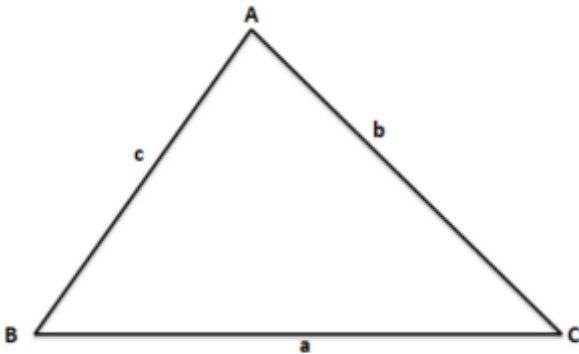
$|AB| = |AC| = |BC|$

$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^\circ$

Eşkenar üçgen ikizkenar üçgenin özelliklerini sağlar.

Üçgende Açı Kenar Bağlantıları

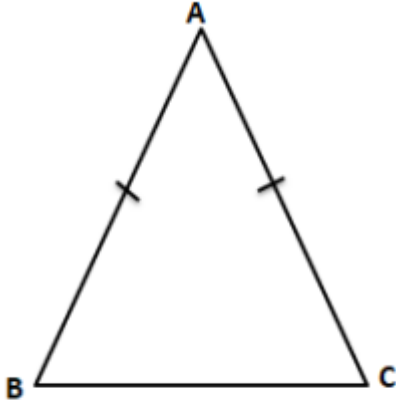
1. Bir üçgende ölçüsü büyük olan açının karşısındaki kenar uzunluğu, ölçüsü küçük olan açının karşısındaki kenar uzunluğundan daha büyüktür. Yani büyük açı karşısında büyük kenar, küçük açı karşısında küçük kenar bulunur.



ABC üçgeninde $m\hat{A} > m\hat{B} > m\hat{C}$

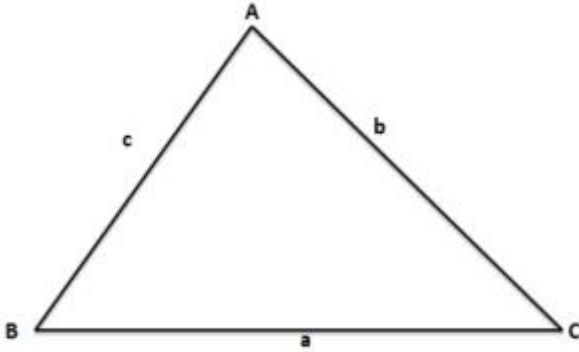
$a > b > c$

Tersi de geçerlidir. Uzun kenarı gören açı kısa kenarı gören açıdan daha büyüktür. İkizkenar üçgenden de bildiğimiz gibi eşit açılarda karşısındaki kenarlar eşittir.



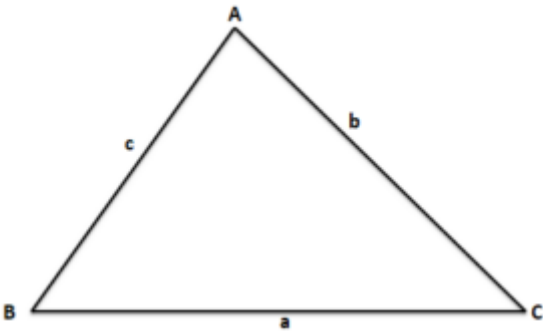
$$m(B) = m(C) \rightarrow |AB| = |AC|$$
$$m(A) < m(B) = m(C) \text{ ise}$$
$$|BC| < |AB| = |AC| \text{ olur.}$$

2. Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük farkının mutlak değerinden büyüktür. ABC üçgeninde,

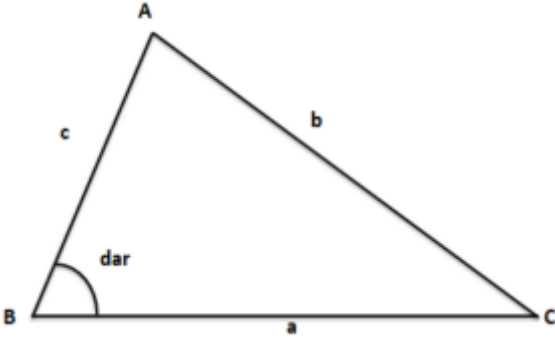


$$|b - c| < a < (b + c) \text{ diğer kenarlar içinde aynı}$$
$$\text{durum geçerlidir.}$$
$$|a - c| < b < (a + c)$$
$$|a - b| < c < (a + b) \text{ olur.}$$

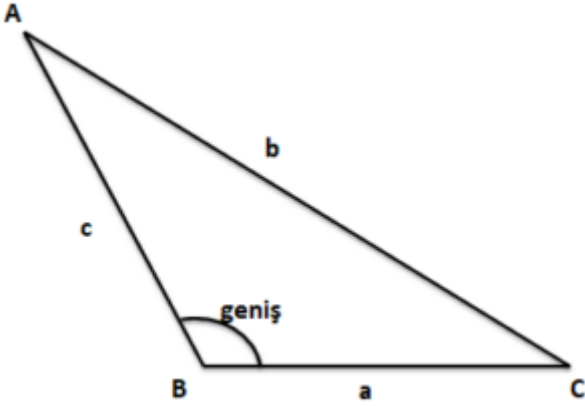
3. Dik, dar ve geniş açılı üçgenlerde kenarlar arasındaki ilişkiler.
Bir dik üçgende kenarlar arasında Pisagor Teoremi $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı vardır.



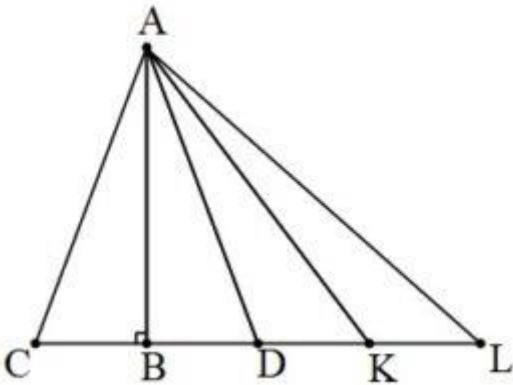
Dar açılı üçgende b ve c sabit tutulup **B** açısı küçültülürse **b** de küçülür.
 $m(B) < 90^\circ \quad b^2 < a^2 + c^2$



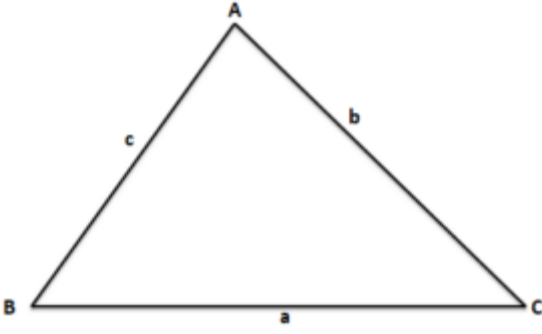
Geniş açılı üçgende b ve c sabit tutulup **B** açısı büyütülürse **b** da büyür.
 $m(B) < 90^\circ \quad b^2 > c^2 + a^2$



4. Çeşitkenar bir üçgende aynı köşeden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunluklarının sıralanması,
 $|AB| = h_a$; yükseklik
 $|AD| = n_a$; açıortay
 $|AK| = V_a$; kenarortay
 Olmak üzere; $h_a < n_a < V_a$ şeklinde sıralama vardır.



5. Çeşitkenar bir üçgende, açı, açıortay, kenarortay ve yükseklik arasındaki sıralama; ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunluklarıdır.
 $m(A) > m(B) > m(C)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda üçgende;



Kenarlar : $a > b > c$

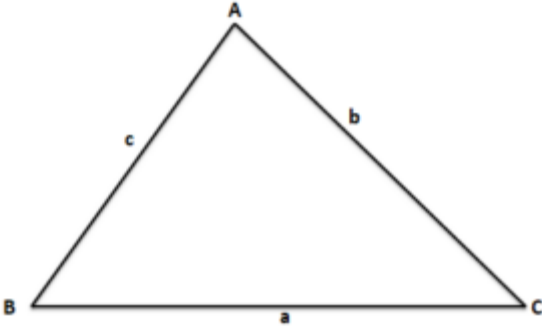
Yükseklikler : $h_a < h_b < h_c$

Açıortaylar : $n_a < n_b < n_c$

Kenarortaylar : $V_a < V_b < V_c$ şeklinde sıralanırlar.

Üçgen Eşitsizliği

Bir üçgende bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür. Bu eşitsizliğe **üçgen eşitsizliği** denir.



$$b - c < a < b + c$$

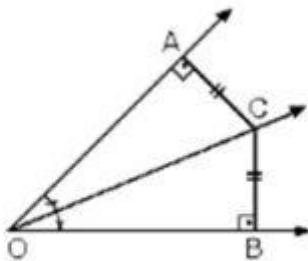
$$a - c < b < a + c$$

$$a - b < c < a + b$$

Üçgenlerin Yardımcı Elemanları

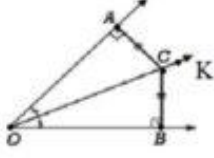
Açıortay

Bir açıyı iki eş açığa ayıran ışına **açıortay** denir. Açıortay iç ve dış açıortay olmak üzere ikiye ayrılır.



[OC ışını (\widehat{AOB}) açısının açıortayıdır.]

Açıortay Teoreminin İspatı

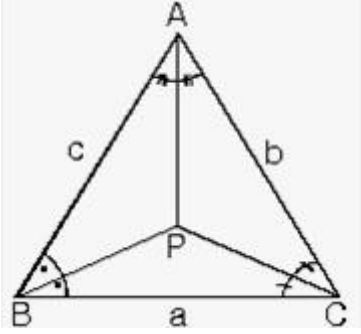


Elde edilen AOC ve COB üçgenlerinin tüm açıları eşit ortak bir kenarı olduğundan bu üçgenler eşittir. Bu durumda;

- $|AC|=|CB|$
- $|OB|=|OA|$ olur.

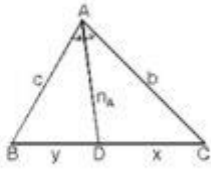
Üçgende İç Açortay

Bir üçgenin bir iç açısını iki eş açığa ayıran ışına o üçgenin iç açortayı denir. Bir üçgende iç açortaylar tek noktada kesişir.



Bir üçgende iç açortayların kesişim noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

Üçgende İç Açortay Teoremi

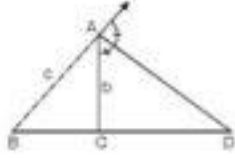


ABC üçgeninde [AD] açortay olmak üzere;

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{y}$$

$$n_A = \sqrt{b \cdot c - x \cdot y}$$

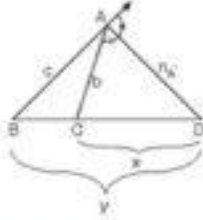
Üçgende Dış Açortay



ABC üçgeninde [AD] A köşesine ait dış açıortay olmak

üzere;

$$\frac{b}{c} = \frac{|CD|}{|BD|}$$



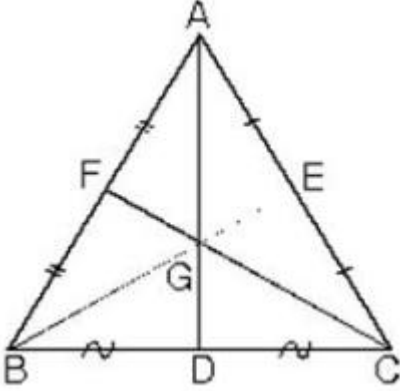
ABC üçgeninde [AD] dış açıortayının uzunluğu n'_A

$$n'_A = \sqrt{x' \cdot y' - b \cdot c}$$

Kenarortay

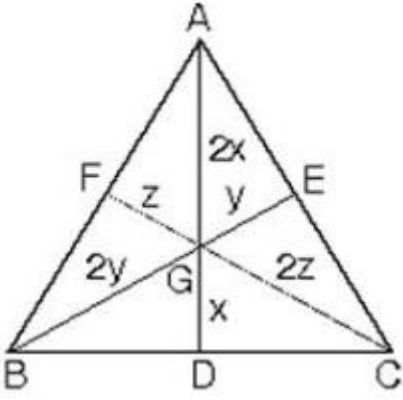
Bir üçgende bir köşeyi karşısındaki kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına o kenara ait **kenarortay** denir.

1. Üçgenlerde kenarortaylar bir noktada kesişirler. Kenarortayların kesişim noktasına **ağırlık merkezi** denir.



ABC üçgeninde [AD], [BE] ve [CF] kenarortaylarının kesiştikleri G noktasına ABC üçgeninin ağırlık merkezi denir.

Ağırlık merkezi kenarortayı, kenara 1 birim, köşeye 2 birim uzaklık olacak şekilde böler.



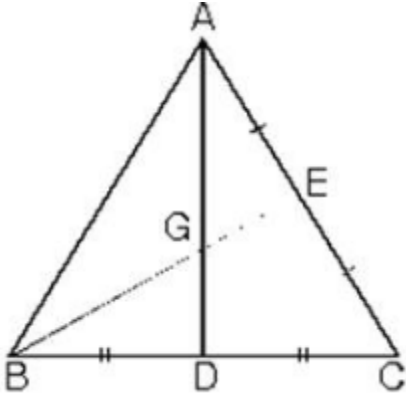
ABC üçgeninde D, E, F noktaları buldukları kenarların orta noktaları ve G ağırlık merkezi ise

$$|AG|=2|GD|$$

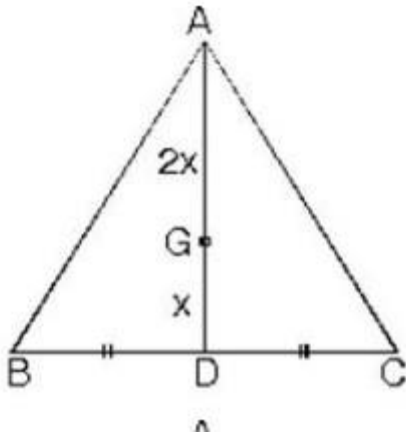
$$|BG|=2|GE|$$

$$|CG|=2|GF|$$

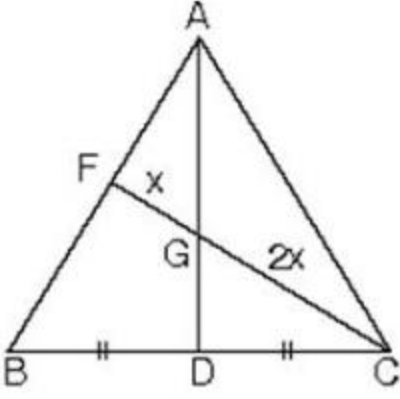
Bir üçgende iki kenarortayın kesişmesiyle oluşan nokta ağırlık merkezidir.



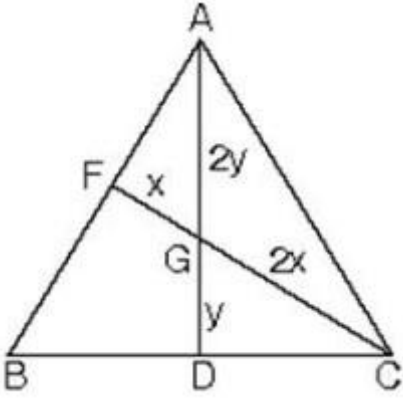
ABC üçgeninde [AD] kenarortay ve $|AG| = 2|GD|$ olduğunda G noktası ağırlık merkezidir.



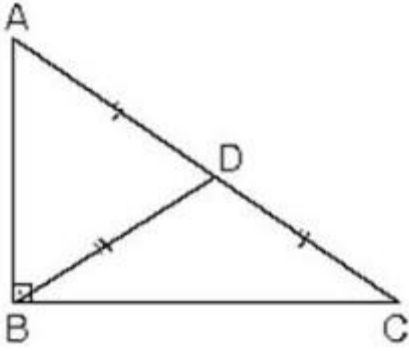
ABC üçgeninde [AD] kenarortay ve $|CG| = 2|FG|$ olduğunda G noktası ağırlık merkezidir.



ABC üçgeninde $|AG| = 2|GD|$ ve $|CG| = 2|GF|$ eşitliğini sağlayan G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.



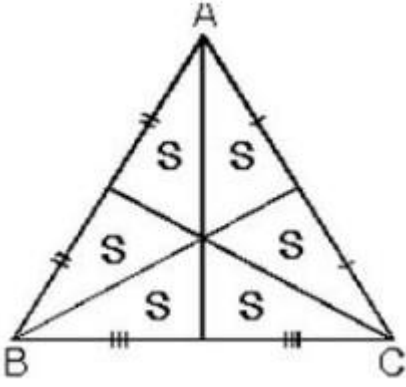
2. Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay (dik köşeden çizilen kenarortay) hipotenüsün yarısına eşittir.



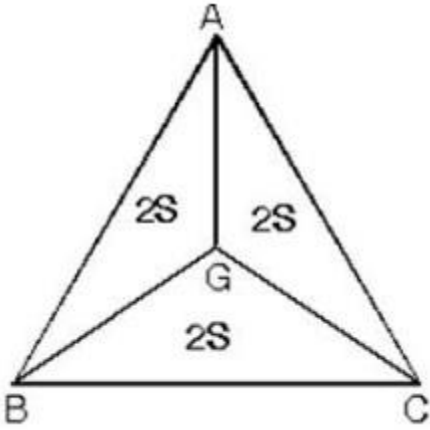
ABC dik üçgeninde [BD] hipotenüse ait kenarortay $|AD|=|DC|=|BD|$

3. Kenarortayların Böldüğü Alanlar

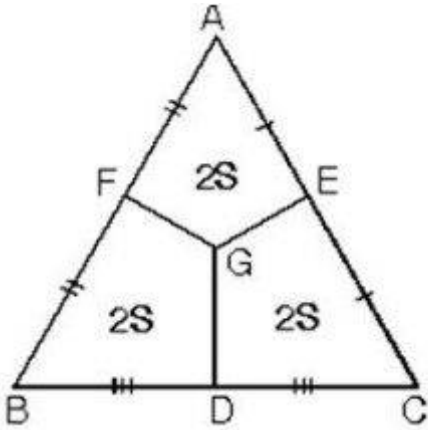
Kenarortaylar üçgenin alanını altı eşit parçaya bölerler.



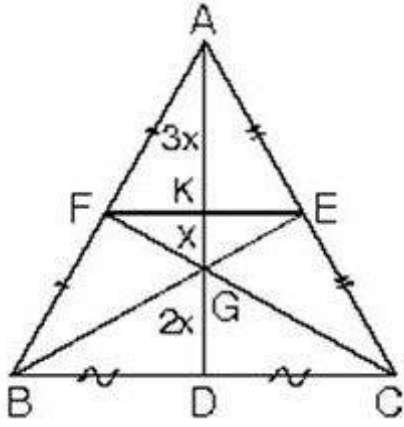
G ağırlık merkezi köşelere birleştirildiğinde üçgenin alanı üç eşit parçaya bölünür.



G ağırlık merkezi kenarların orta noktaları ile birleştirildiğinde üçgenin alanı üç eşit parçaya bölünür.



4. ABC üçgeninde kenarortaylar ve orta taban [FE] çizilirse



$$|AK| = 3x$$

$$|KG| = x$$

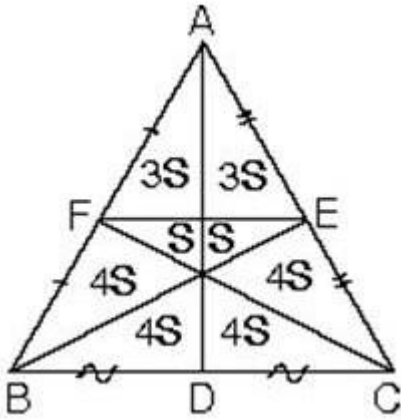
$$|GD| = 2x \text{ eşitlikleri bulunur.}$$

Bu kuran 312 kuralı olarak da adlandırabilir.

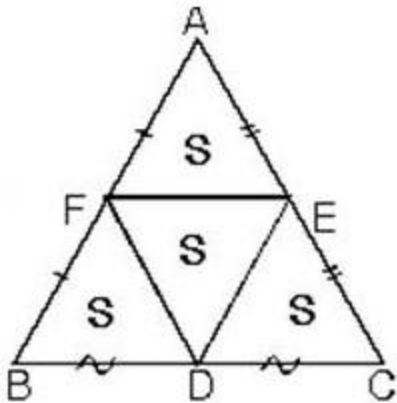
K noktası [AD] kenarortayının orta noktasıdır. Ayrıca [FE] orta taban olduğundan;

$$[FE] \parallel [BC] \quad 2[FE]=[BC]$$

ABC üçgeninde kenarortaylar ve [FE] çizildiğinde şekildeki gibi bir alan bölünmesi oluşur.

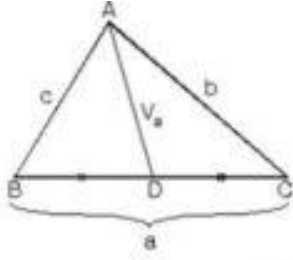


Kenarların orta noktalarını birbirine birleştirdiğimizde üçgenin alanı dört eşit parçaya bölünür.



5. Kenarortay Uzunluğu (Kenarortay Teoremi)

ABC üçgeninde A köşesinden çizilen kenarortayın uzunluğu V_a ;



$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$

Bu bağıntı diğer kenarortaylar içinde geçerlidir.

$$2V_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$

Kenarortaylar taraf tarafa toplanırsa;

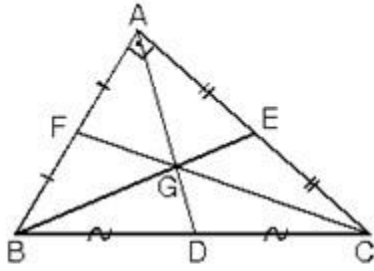
$$2V_c^2 = a^2 + c^2 - \frac{c^2}{2}$$

Kenarortaylar taraf tarafa toplanırsa;

$$V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ elde edilir.}$$

6. Dik Üçgende Kenarortaylar

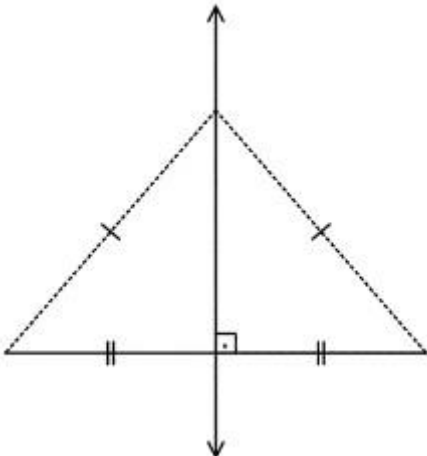
A açısı 90° olan bir dik üçgende kenarortaylar arasında



$$5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$

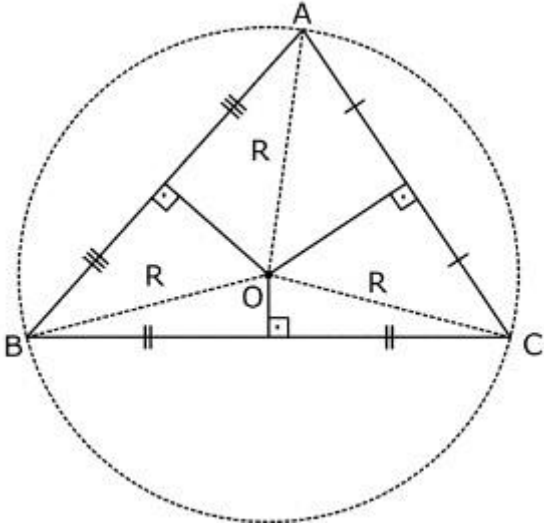
Orta Dikme

Bir doğru parçasının orta noktasından geçen ve doğru parçasına dik olan doğruya **orta dikme doğrusu** denir.



Orta dikmenin noktanın üstündeki herhangi bir noktadan, doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklıklar birbirine eşittir.

Üçgende Kenar Orta Dikme

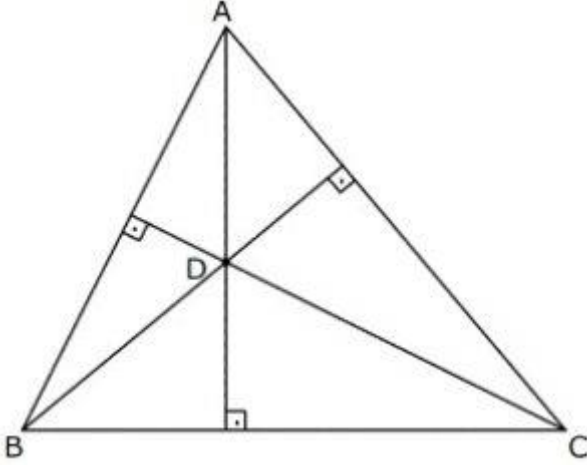


Üçgenin kenar orta dikmeleri O noktasında kesiştiğinden O noktası, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir
[OA], [OB] ve [OC] çevrel çemberin yarıçaplarıdır.
 $|OA|=|OB|=|OC|=r$ olur.

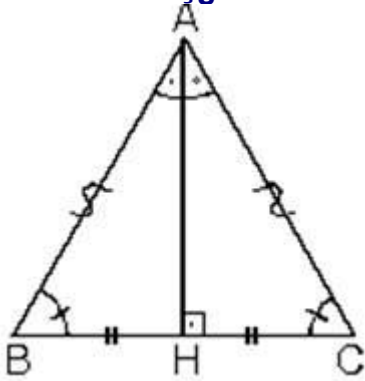
Yükseklik

Üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara çizilen dikmeye üçgenin o kenarına ait yüksekliği denir. Yükseklik daima kenara diktir.

Bir üçgende yükseklikler tek bir noktada kesişir. Bu noktaya da **diklik merkezi** denir.

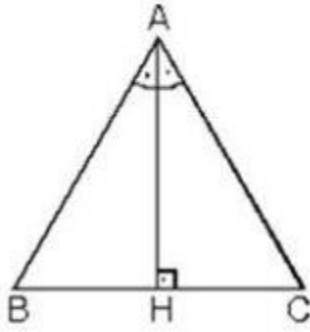


İkiz Kenar Üçgende Yükseklik



İkizkenar üçgenlerde eşit olmayan kenara indirilen dikme üçgeni iki eş üçgene ayırır.

1. Bir üçgende, açıortay aynı zamanda yükseklik ise bu üçgen ikizkenar üçgendir.

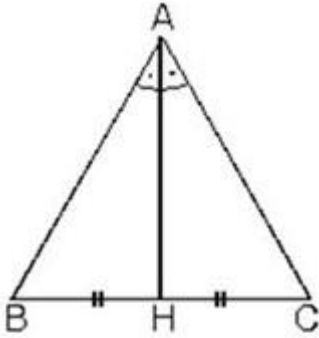


$$|AB| = |AC|$$

$$|BH| = |HC|$$

$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$$

2. Bir üçgende, açıortay aynı zamanda kenarortay ise bu üçgen ikizkenar üçgendir.

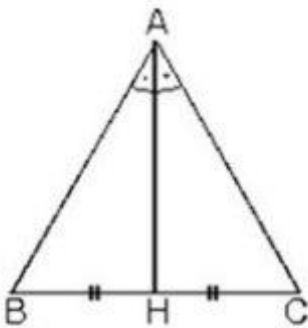


$$|AB| = |AC|$$

$$|BH| = |HC|$$

$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$$

3. Bir üçgende, yükseklik aynı zamanda kenarortay ise bu üçgen ikizkenar üçgendir.

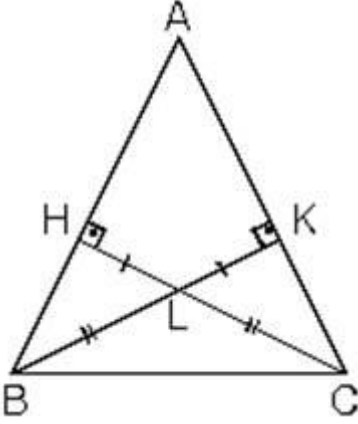


$$|AB| = |AC|$$

$$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC})$$

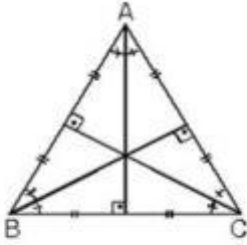
$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$$

4. İkizkenar üçgende ikizkenara ait yükseklikler eşittir. Bu durumda yüksekliklerin kesim noktasının ayırdığı parçalarda eşit olur. İkizkenar üçgende ikizkenara ait kenarortaylar ve kenarortayların kesim noktasının ayırdığı parçalar da birbirine eşittir.



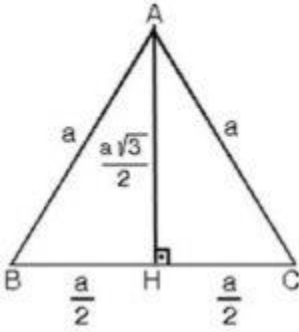
Eşkenar Üçgende Yükseklik

1. Eşkenar üçgende bütün açıortay, kenarortay yükseklikler çakışık ve hepsinin uzunlukları eşittir.



$$n_A = n_B = n_C = V_a = V_b = V_c = h_a = h_b = h_c$$

2. Eşkenar üçgenin bir kenarına a dersek yükseklik;

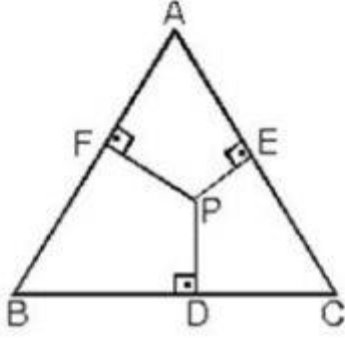


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bu durumda eş kenar üçgenin alanı

$$A(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

3. Eşkenar üçgenin içindeki herhangi bir noktadan kenarlara çizilen dik uzunlukların toplamı, eşkenar üçgene ait yüksekliği verir. Bir kenarı a olan eşkenar üçgende;

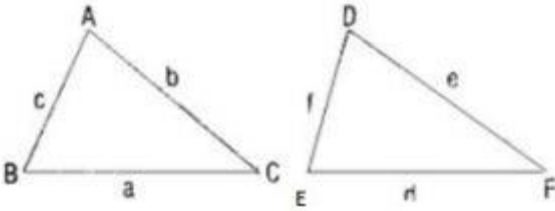


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = |PE| + |DP| + |FP|$$

Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik

Üçgenlerde Eşlik Nedir?

İki üçgenin karşılıklı kenarının uzunlukları ve açılarının ölçüleri birbirine eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir. İki üçgenin eşliği " \cong " sembolü ile gösterilir. Sembolle gösterirken eş olan açılar aynı sırada yazılmalıdır.



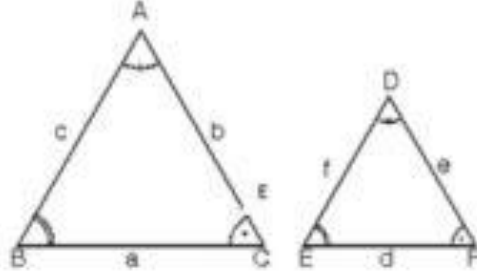
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

ABC ile DEF üçgenleri arasında yapılan $ABC \leftrightarrow DEF$ eşlemesinde karşılıklı kenarlar ve karşılıklı açılar eş ise, bu eşleme bir eşliktir.

Üçgenlerde Benzerlik Nedir?

İki üçgenin karşılıklı köşelerinin açıları eş olan ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılı olan üçgenlere benzer üçgenler denir. İki üçgenin benzerliği göstermek için kullanılan sembol ise şöyledir;

Benzerlik sembolü $\Rightarrow \sim$



$$\left. \begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \\ m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \\ m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \end{array} \right\} \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

oranı yazılır. Buradan ABC üçgeni ile DEF üçgeni benzerdir denir ve $ABC \sim DEF$ biçiminde gösterilir.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

eşitliğinde verilen k sayısına benzerlik oranı denir.

$k = 1$ olan benzer üçgenlerde karşılıklı kenarlar eşit olduğundan, bu üçgenlere **eş üçgenler** denir.

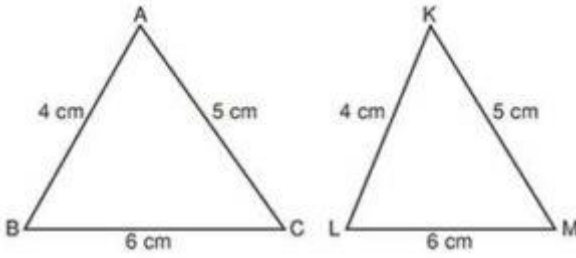
$ABC \sim DEF$ benzerliği yazılırken eş açılarının sıralanmasına dikkat edilir.

Üçgenlerde Eşlik Şartları

İki üçgenin karşılıklı tüm kenarlarının uzunlukları ve tüm açılarının ölçüleri eşitse bu iki üçgen eşittir. Ancak iki üçgenin tüm kenarları ve tüm açıları her zaman verilmeyebilir. Böyle durumlarda bu kısıtlı verilere bakarak da biz iki üçgenin eş olup olmadığına kanaat getirebiliriz.

Kenar – Kenar – Kenar Eşlik Şartı (KKK)

İki üçgenin karşılıklı üçer kenarı eş ise, bu iki üçgen eşittir.



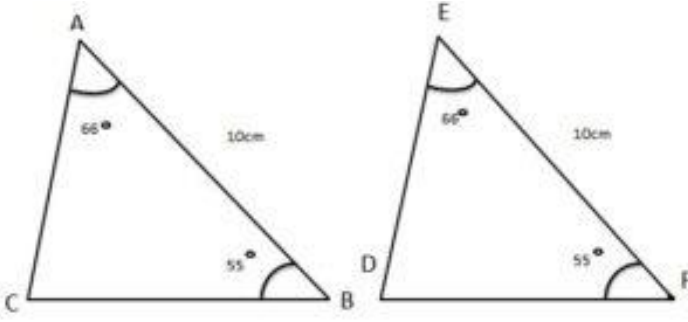
$$\begin{array}{l} |AB| = |KL| = 4 \text{ cm} \\ |AC| = |KM| = 5 \text{ cm} \\ |BC| = |LM| = 6 \text{ cm} \\ \widehat{ABC} \cong \widehat{KLM} \end{array}$$

Kenar – Açı – Kenar Eşlik Şartı (KAK)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında ikişer kenar uzunlukları ve bu iki kenar arasında kalan açılarının ölçüleri eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buna; Kenar – Açı – Kenar (KAK) eşlik şartı denir.

Açı – Kenar – Açı Eşlik Şartı (AKA)

İki üçgenin ikişer açıları ile bu açıların köşelerini birleştiren kenarları karşılıklı olarak eş ise, bu iki üçgen eşittir.



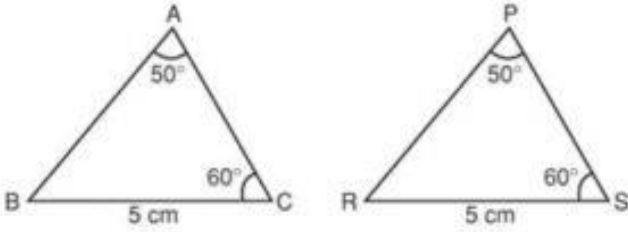
$$s(\hat{A}) = s(\hat{E}) = 66^\circ$$

$$|AB| = |EF| = 10 \text{ cm}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Kenar – Açı – Açı Eşlik Şartı (KAA)

İki üçgen arasında birbir eşleme yapıldığında ikişer açılarının ölçüleri ve bu açılardan herhangi birinin karşısındaki kenarın uzunlukları eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buna; Kenar – Açı – Açı (KAA) eşlik şartı denir.



$$s(\hat{A}) = s(\hat{P}) = 50^\circ$$

$$s(\hat{C}) = s(\hat{S}) = 60^\circ$$

$$|BC| = |RS| = 5 \text{ cm}$$

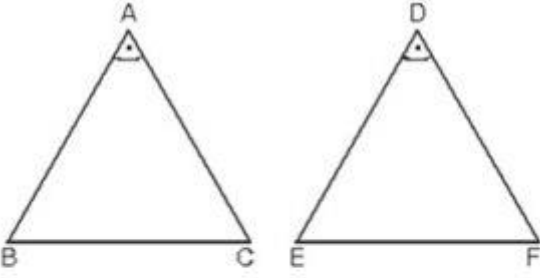
$$\triangle ABC \cong \triangle PRS$$

Üçgenlerde Benzerlik Şartları

- *Benzer üçgenlerin çevreleri oranı benzerlik oranına eşittir.
- *Benzer üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanları da (yükseklikleri, açıortayları, kenarortayları) aynı benzerlik oranına sahiptir.
- *Bütün eş üçgenler aynı zamanda benzer üçgenlerdir.
- *Bütün benzer üçgenler eş üçgen olmak zorunda değildir.
- *Eş üçgenlerde benzerlik oranı 1'dir.
- *Üçgenlerde benzerlik alan ilişkisi, iki üçgenin benzerlik oranının karesine eşittir. Yani alanları oranı k^2 'dir.

Kenar-Açı-Kenar (K. A. K.) Benzerlik Kuralı

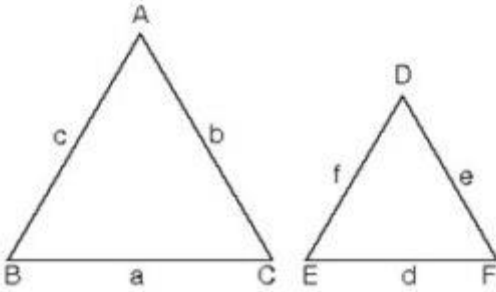
İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında karşılıklı ikişer kenar uzunluklarının oranı ve bu iki kenar arasında kalan açılarının ölçüleri birbirine eşit ise bu üçgenler benzerdir üçgenlerdir. Buna; Kenar – Açı – Kenar (KAK) benzerlik şartı denir.



$$\left. \begin{array}{l} \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} \\ \text{ve} \\ m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \end{array} \right\} ABC \sim DEF$$

Kenar – Kenar – Kenar (K.K.K.) Benzerlik Kuralı

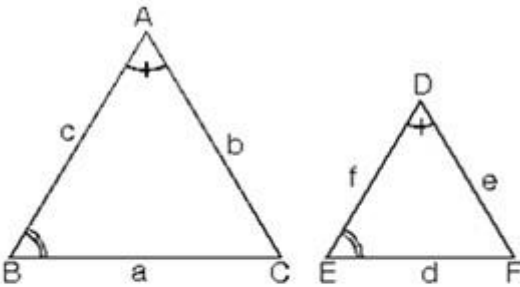
İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında karşılıklı kenar uzunluklarının oranı birbirine eşit ise bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Buna; Kenar – Kenar – Kenar (KKK) benzerlik şartı denir.



$$\left. \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \right\} ABC \sim DEF$$

Açı-Açı (A.A) Benzerlik Kuralı

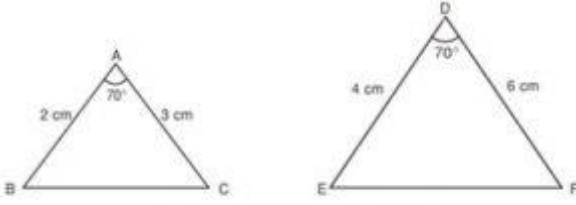
Bire bir eşleşen iki üçgenin karşılıklı iki açısının ölçüleri eşit olan üçgenlere benzer üçgenler denir. Bu benzerlik durumu Açı – Açı (A. A.) benzerlik kuralı ile açıklanır.



$$\left. \begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \\ m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \end{array} \right\} ABC \sim DEF$$

Kenar-Açı-Kenar (K. A. K.) Benzerlik Kuralı

Karşılıklı iki kenarın oluşturduğu açılar eş olan ve kenar uzunlukları orantılı olan üçgenler benzer üçgenlerdir. Bu benzerlik durumu Kenar – Açı – Kenar (K. A. K.) kuralı ile açıklanır.

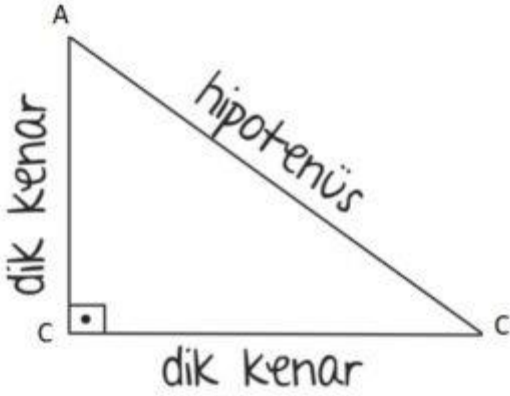


$$s(\hat{A}) = s(\hat{D}) = 70^\circ, \quad \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Dik Üçgen ve Trigonometri

Pisagor Teoremi

Pisagor Teoremine göre; bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamının hipotenüsün karesine eşittir.



$$\text{hipotenüs}^2 = \text{dikkenar}^2 + \text{dikkenar}^2$$

Pisagor'dan bu yana Pisagor teoremi üzerinde çalışan matematikçiler şöyle bir genellemeye ulaşmıştır:

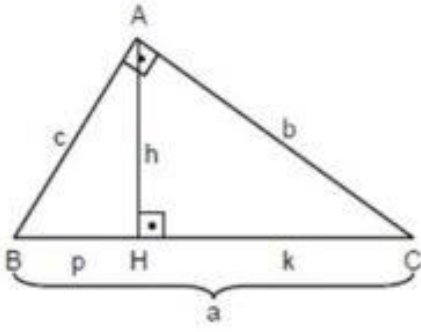
n pozitif bir doğal sayı olmak üzere;

- $a = 2n + 1$
- $b = 2n^2 + 2n$
- $c = 2n^2 + 2n + 1$

eşitliklerini sağlayan tüm a, b ve c doğal sayıları, $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini de sağlar.

Oklid Teoremi

Bir dik üçgenin dik açının olduğu köşeden karşı kenara indirilen dikme için



$$h^2 = p \cdot k$$

$$b^2 = k \cdot a$$

$$c^2 = p \cdot a$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

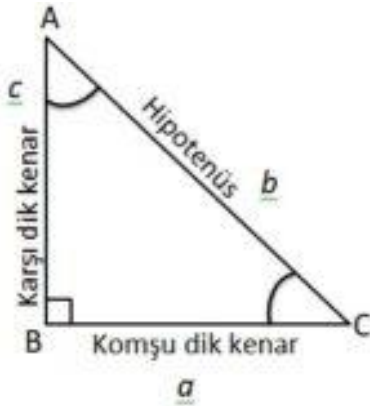
Trigonometri Nedir?

Trigonometri kelimesi Yunanca trigōnon (üçgen) ve metron (ölçmek) kelimelerinin birleşmesiyle oluşmuştur. Trigonometri, üçgenlerin açıları ile kenarları arasındaki bağıntıları konu edinen bir matematik dalıdır. Trigonometri günümüzde ekonomi, fizik ve mühendislik alanlarında sıkça kullanılmaktadır.

Sinüs, Kosinüs, Tanjant, Kotanjant

Sinüs

Bir dik üçgende, bir dar açının karşısındaki dik kenar uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranına o dar açının sinüsü denir. Bir A açısının sinüsü "sin A" şeklinde gösterilir.



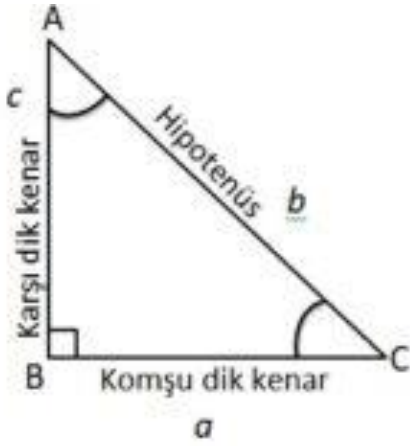
$$\sin = \frac{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

Kosinüs

Bir dik üçgende, bir dar açının komşu dik kenar uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranına o dar açının kosinüsü denir. Bir A açısının kosinüsü "cos A" şeklinde gösterilir.



$$\cos = \frac{\text{komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}$$

Tanjant

Bir dik üçgende, bir dar açının karşısındaki dik kenar uzunluğunun komşu dik kenar uzunluğuna oranına o dar açının tanjantı denir. Bir A açısının tanjantı "tan A" şeklinde gösterilir.



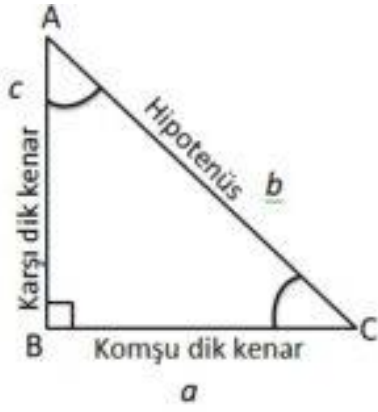
$$\tan = \frac{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{komşu dik kenar uzunluğu}}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}$$

Kotanjant

Bir dik üçgende, bir dar açının komşu dik kenar uzunluğunun karşısındaki dik kenar uzunluğuna oranına o dar açının kotanjantı denir. Bir A açısının kotanjantı "cot A" şeklinde gösterilir.

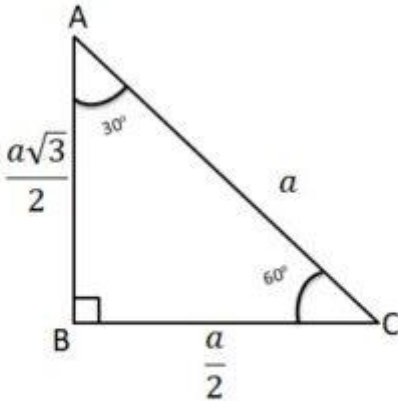


$$\cot = \frac{\text{komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}$$

$$\cot \hat{A} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}$$

$$\cot \hat{C} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}$$

30-60-90 Üçgeni



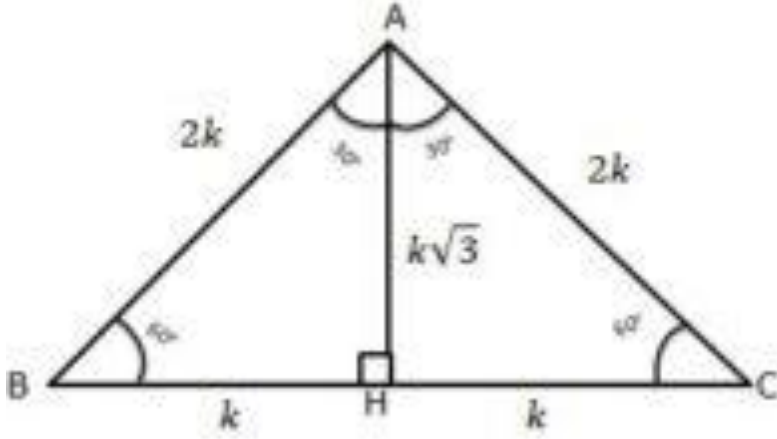
ABC(30°-60°-90°) üçgeni

*İç açıları her zaman 30 60 ve 90 olan üçgenlerdir

*30 derecenin karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün yarısına eşittir.

*60 derecenin karşısındaki kenar uzunluğu ise hipotenüse eşittir. Yani 30 derecenin karşısındaki kenar uzunluğunun iki katıdır.

*90 derecenin karşısındaki kenar uzunluğu ise 60 derece ve 30 derecenin karşısındaki kenar uzunluklarının *toplamına eşittir.

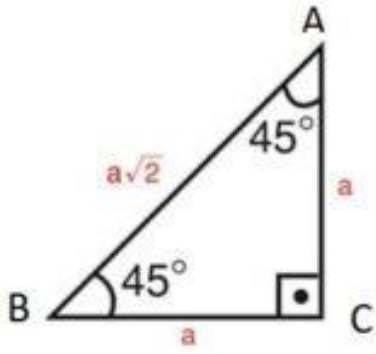


Buna göre 30° ve 60° lik açların trigonometrik oranları aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ &= \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 30^\circ &= \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{k\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3} \\ \sin 60^\circ &= \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \frac{|BH|}{|AC|} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \\ \tan 60^\circ &= \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{k\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3} \\ \cot 60^\circ &= \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

45-45-90 Üçgeni

İkizkenar bir dik üçgenin açıları $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 'dir. Bu ikizkenar dik üçgenin dik kenarlarının uzunluğunu a kabul edersek hipotenüsün uzunluğunu Pisagor Bağıntısından $a\sqrt{2}$ buluruz. Bu kenarları oranlarsak aşağıdaki trigonometrik oranları elde ederiz.



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

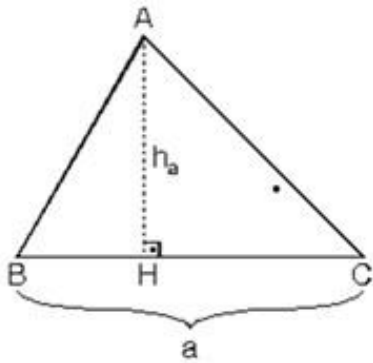
$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 45^\circ = 1$$

Üçgenin Alanı

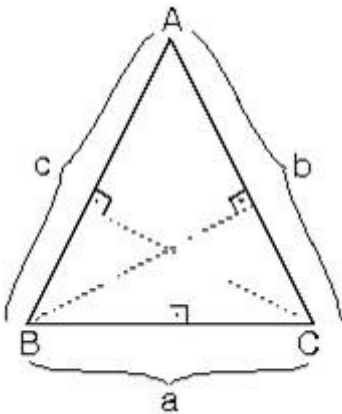
Genel Alan Bağıntısı

Bir üçgenin alanı, bir kenarı ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır.

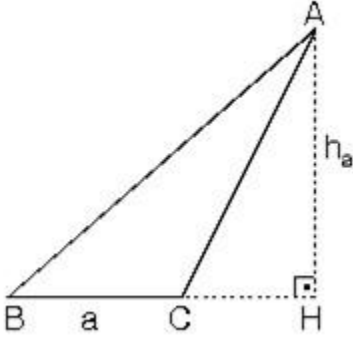


$$A(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Hangi kenarı kullanırsak kullanalım üçgenin alanı sabittir.

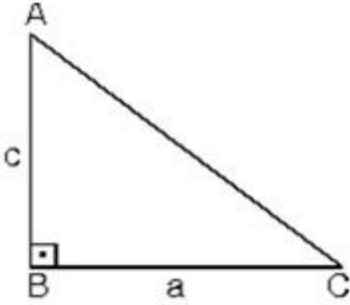


Bir ABC üçgeninde yükseklik her zaman üçgenin içinde olmayabilir.



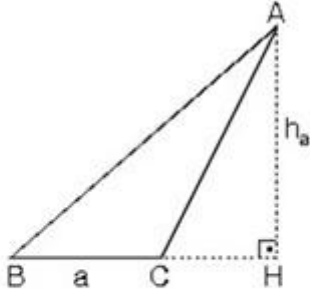
Dik Üçgende Alan

Dik üçgensel bölgenin alanı, dik kenar uzunluklarının çarpımının yarısının alınması ile bulunur. Eğer hipotenüse ait yükseklik biliniyorsa taban ile yükseklik çarpımının yarısı da alınabilir.



Geniş Açılı Üçgende Alan

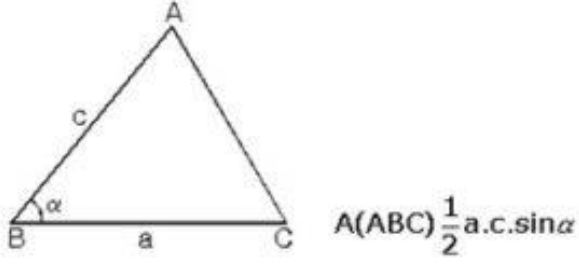
Geniş açılı üçgenlerde [AB] ve [BC] kenarlarına ait yükseklikler üçgenin dış bölgesindedir.



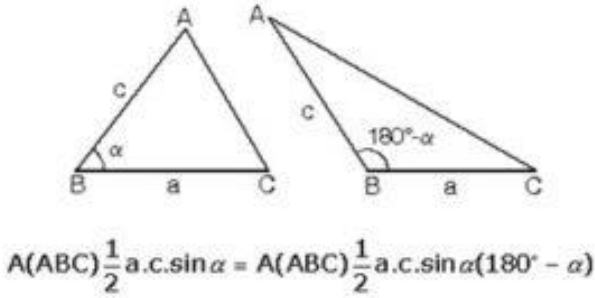
$$A(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Bir açısı ve bu açının kenarları bilinen üçgenin alanı

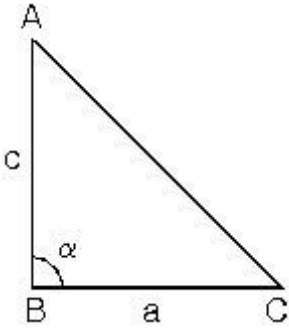
ABC üçgeninde $m(\angle C) = \alpha$ $|AC| = b$ $|BC| = a$



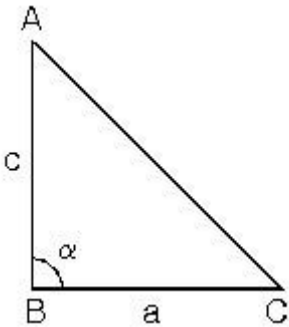
Birbirini 180° ye tamamlayan açılarının sinüsleri eşit olduğundan;



$|BC| = a$ $|AB| = c$ uzunlukları sabit olan ABC üçgeninin alanının maksimum olabilmesi için $a = 90^\circ$ olmalıdır.

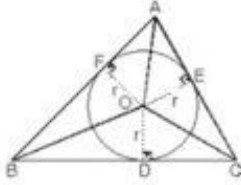


Hipotenüs uzunluğu sabit olan ABC dik üçgeninin alanının en büyük değerini alabilmesi için $|AB| = |AC|$ olmalıdır. ABC üçgeni ikizkenar dik üçgen olmalıdır.



Üç kenarının uzunluğu verilen üçgenin alanı

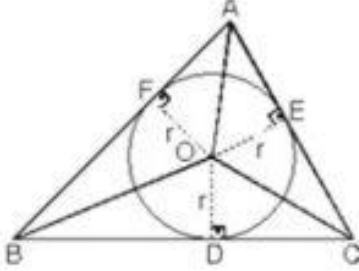
Üç kenarının uzunluğu verilen üçgenin alanı; ABC üçgeninin çevresi $\text{Çevre}(ABC) = a + b + c$ Çevrenin yarısına u dersek;



$$u = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A(ABC) = \sqrt{u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)}$$

Çevresi ve iç teğet çemberinin yarıçapı verilen üçgenin alanı



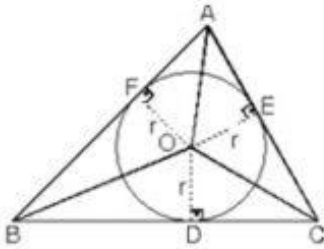
ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı r olsun

$$A(BOC) = \frac{a \cdot r}{2}$$

$$A(AOC) = \frac{a \cdot r}{2}$$

$$A(AOB) = \frac{a \cdot r}{2}$$

Bu üç alanı toplayarak ABC üçgeninin alanını bulabiliriz.



ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı r olsun

$$A(ABC) = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2}$$

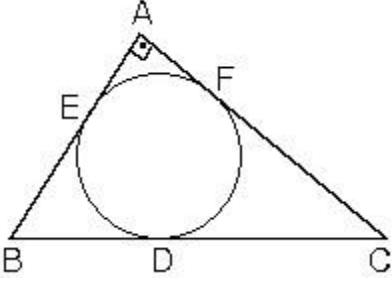
$$u = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A(ABC) = u \cdot r$$

Bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin yarıçapı r ve yükseklikler;

$$h_a, h_b, h_c \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

ABC dik üçgeninde $A(ABC) = |BD| \cdot |DC|$



5. ÜNİTE : VERİ

Merkezi Eğilim Ölçüleri

Gözlenen verilerin düzenlenerek, tablolarla, grafiklerle sunulması çoğu durumda yeterli olmaz. Genel durumu yansıtacak bir takım ölçülere gereksinim vardır. Bu ölçüler merkezi eğilim ölçüleri olup en çok kullanılanları;

Aritmetik Ortalama

Bir veri dizisindeki terimlerin toplamının terim adedine bölünmesiyle bulunur. \bar{X} ile gösterilir.

Aritmetik ortalama \bar{X} sembolü ile gösterilir.

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \bar{X} = \frac{\text{Verilerin Toplamı}}{\text{Veri Sayısı}}$$

Örnek

7, 6, 7, 8, 10, 12, 6 veri grubundaki sayıların ortalaması kaçtır?

Çözüm

$$\frac{(7 + 6 + 7 + 8 + 10 + 12 + 6)}{7} = 8$$

Ortanca (Medyan)

Terim sayısı tek sayı ise medyan tam ortadaki terimdir. Medyan terimlerden biridir. Terim sayısı çift sayı ise medyan ortadaki iki terimin aritmetik ortalamasıdır. Medyan terimlerden biri olmayabilir.

*Dizinin terim sayısı tek ise ortadaki terim ortancadır.

*Dizinin terim sayısı çift ise ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması ortancadır.

Örnek

Örnek: Bir markette peynir fiyatları aşağıdaki gibidir: 6, 12, 15, 4, 8. Medyan fiyat nedir?

- 4
- 6
- **8** Dizin sıralandıktan sonra ortadaki değer medyandır.
- 12
- 15

Tepe Değer (Mod)

Bir veri grubundaki en çok (en sık) tekrarlanan değere Tepe değeri (Mod) denir. Tekrar sayıları frekans olarak adlandırılır. Bir veri grubunda birden fazla tekrar eden değer yoksa, bu veri grubunun tepe değeri yoktur.

Bir veri grubunda aynı sayıda tekrar eden birden fazla değer varsa, tepe değeri de birden fazla olabilir. Fakat, tüm değerler eşit sayıda tekrar ediyorsa tepe değeri yoktur. Ardışık olan tepe değerlerinin ortalaması alınır.

Örnek

3, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 10 veri grubunun tepe değerini bulalım.

En çok tekrar eden veri 7 olduğu için tepe değer 7'dir.

Merkezi Yayılım (Dağılım) Ölçüleri

Açıklık (Aralık – Ranj)

Sonlu bir veri grubunda en büyük terimden en küçük terimi çıkartarak bulunan deęerdir.

$R = \text{En Büyük Değer} - \text{En Küçük Değer}$

Örnek

7, 3, 4, 9, 2, 7, 5 veri grubunun açıklığı (Ranjını) bulunuz.

Çözüm: $R = 9 - 2 = 7$ dir.

Örnek

26, 16, 16, 33, 55, 109 sayılarından en büyük olan 109 en küçük olan 16 dır.

Buna göre verilen sayıların açıklığı, $109 - 16 = 93$ tür.

Çeyrekler Açıklığı

Bir veri grubundaki terimler küçükten büyüğe doğru sıralandığında ilk terime en küçük, son terime en büyük, bunların ortasındaki terime de **ortanca** denir.

Ortancadan küçük olan terimlerin ortancasına **alt çeyrek** (Q1) denir.

Ortancadan büyük olan terimlerin ortancasına **üst çeyrek**(Q3) denir.

Bir başka ifade ile veri kümesinin ilk % 50 lik kısmının ortancasına **Q1** , sonraki % 50 lik kısmının ortancasına da **Q3** denir.

Örnek

2, 3 , 6, 9, 5, 10, 4, 2, 9, 8, 5 verilerinin oluşturduğu grubun çeyrekler açıklığı bulalım.

Verileri küçükten büyüğe sıraya koyalım.

2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 8, 9, 9, 10

Ortanca terim, alt uçtan ve üst uçtan eşit uzaklıkta olan terimdir. Veya $Q = 1/2(n+1)$ inci terimdir. 6. terim yapar

2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 8, 9, 9, 10

ortanca terim(Medyan)

Alt çeyrek: 2, 2, 3, 4, 5 verilerinin ortadaki elemanı olan 3 tür.

Üst çeyrek: 6, 8, 9, 9, 10 verilerinin ortadaki elemanı olan 9 dur

Çeyrekler açıklığı: $9 - 3 = 6$ bulunur.

Standart Sapma

Sonlu bir nicel veri dizisinde her bir elemanın aritmetik ortalama ile olan farkının karelerinin toplamının veri adedinin bir eksiğine bölümünün kare köküdür.

Düşük standart sapma değeri, bir araya toplanmış ve ortalamaya daha yakın verilerin çok olduğunun ölçüsüdür. n tane verinin aritmetik ortalaması x olmak üzere, bu veri grubunun standart sapması (s);

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}} \text{ dir.}$$

Örnek

1, 7, 8, 9, 10, 13, 50 veri grubunun standart sapmasını bulalım.

Ortalama

$$\bar{x} = \frac{1+7+8+9+10+13+50}{7} = 14$$

Standart Sapma

$$s = \sqrt{\frac{(1-14)^2 + (7-14)^2 + (8-14)^2 + (9-14)^2 + (10-14)^2 + (13-14)^2 + (50-14)^2}{7-1}} = \sqrt{265} = 16$$

Verilerin Grafikle Gösterilmesi

Histogram Grafiği

Gruplandırılmış bir veri topluluğunda, her bir gruptaki veri sayılarının bitişik dikdörtgen şeklinde sütunlar halinde gösterimidir.

- *Histogram genelde sürekli verilerin gösteriminde kullanılır.
- *Özellikle veri sayılarının çok olduğu durumlarda tercih edilir.
- *Her aralık eşit olarak bölünerek gösterilir.
- *Her bir veri için ayrı değil, belirli aralıktaki toplam veri sayısı ile ilgili yorum yapılmasını sağlar.

Histogram oluşturulurken;

- 1) Öncelikler veriler küçükten büyüğe sıralanır. (İşlemlerde kolaylık sağlar.)
- 2) Veri grubunun açıklığı (aralığı) bulunur. Açıklık en büyük veriden en küçük verinin çıkartılması ile elde edilir.
- 3) Verilerin kaç gruba ayrılacağı belirlenir. Veri gruplarının sayısının 10 civarında olması uygundur.
- 4) Grup genişliği bulunur. Açıklık değerinin grup sayısına bölünmesiyle elde edilen sayıdan büyük en küçük doğal sayı grup genişliği olarak alınır. (Veri gruplarının sayısının 10 alınması hesaplamayı kolaylaştırır.)
- 5) Veriler en küçük veriden başlayarak grup genişliğine göre gruplara ayrılır.
- 6) Oluşturulan gruplar ve gruplardaki veri sayıları tablo halinde düzenlenir.
- 7) Tabloya bakılarak histogram çizilir.

Soru : Aşağıda bir şirketin 2015 ve 2016 yıllarındaki bazı aylardaki satış miktarlarının karşılaştırılmasını gösteren bir grafik verilmiştir. Grafikle göre ;

A) Satış rakamları arasındaki farkın en çok olduğu ay hangisidir ?

B) Yıl bazında toplam satış miktarlarını bularak, hangi yıl diğerinden adet olarak kaç bin adet fazla satış yapılmıştır?

C) Yıl bazında ortalama satışları bulunuz.



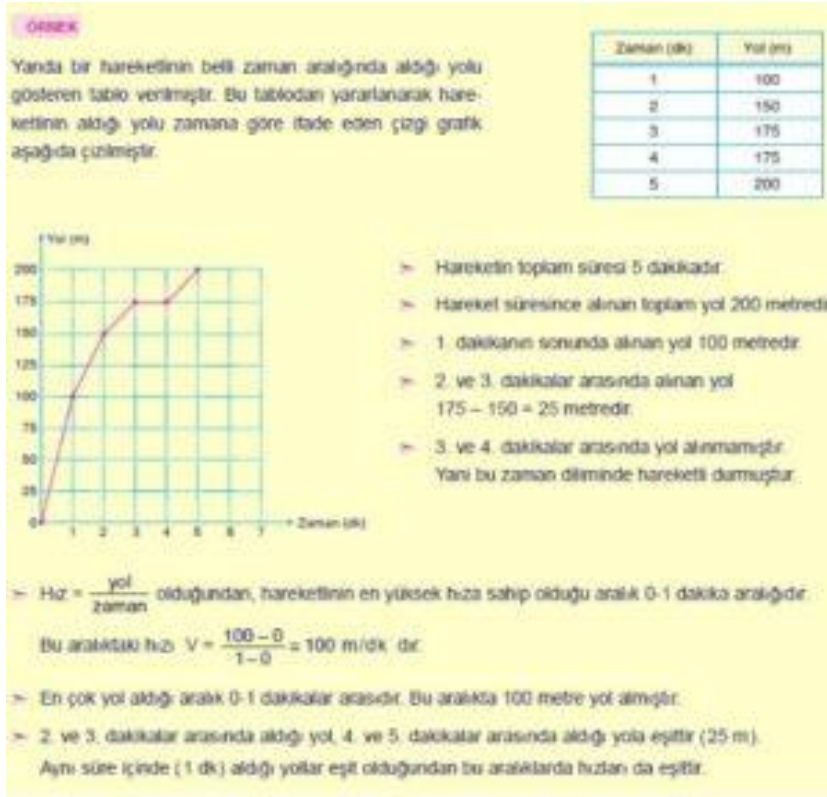
Veri Türleri

Kesikli Veri: Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alamayan veri türüdür. Örneğin bir mağazada satılan ceket sayısı 12,5 olamaz, tam sayı olmak zorundadır. Bir derginin aylık satış sayıları, günlere göre okul kantininden alış-veriş yapan öğrencinin sayıları birer kesikli veridir.

Sürekli Veri: Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alabilen veri türüdür. Bir şehrin aylara göre sıcaklık değişimi, bir bitkinin boyunun yıllara göre değişimi, bir ailenin aylara göre tükettiği elektrik miktarı birer sürekli veridir.

Çizgi Grafiği

Sürekli verilerin yatay ve düşey eksendeki değerleri işaretlenerek bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucunda elde edilen grafik türüdür.



Sütun Grafiği

Veri gruplarını karşılaştırmak için koordinat sisteminde yatay ya da düşey olacak şekilde sütun ya da çubuk kullanılarak çizilen grafik türüdür. Sütun grafiği kesikli veriler için kullanılır.

Daire Grafiği

Verilerin bütüne olan oranını daire dilimleriyle gösteren grafik türüdür. Bütünün parçalarıyla ilgili yorum yapılmasını sağlayan en güçlü yöntemdir.

Ahmet Bey 72 dönümlük arazisinin 18 dönümüne domates, 24 dönümüne patates, 9 dönümüne biber ve kalan kısmına buğday ekliyor.

Ahmet Bey'in arazisiyle ilgili verileri daire grafiğinde gösterelim.

Ürünler	Ekili Alan
Domates	18
Patates	24
Biber	9
Buğday	21
Toplam	72

Daire grafiği çizilirken;

Domatese ait daire diliminin merkez açısı

$$\frac{18}{72} \cdot 360^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$$

Patatese ait dilimin merkez açısı

$$\frac{24}{72} \cdot 360^\circ = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$$

Bibere ait dilimin merkez açısı

$$\frac{9}{72} \cdot 360^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$$

Buğdaya ait dilimin merkez açısı

$$\frac{21}{72} \cdot 360^\circ = \frac{7}{24} \cdot 360^\circ = 105^\circ$$

